

# 點色皆獨

林燈茂

國立屏東教育大學應用數學系退休老師

## 壹、前言

近幾年來中國時報與自由時報之周末生活版均相繼流行刊登「數獨 (Su Doku)」之填數字動動腦活動，以提供讀者享受數學解題樂趣的機會。其玩法是：在  $9 \times 9$  之 81 個方格的各直行、橫列及粗線區隔出來的  $3 \times 3$  區塊內，數字 1~9 只限使用一次，將之補滿待填之方格，此即「數獨」之基本義涵。

圖 1 所列「數獨」問題①~④係引自自由時報 (2011)，其難度依序遞增，問題①為簡易版。該報宣稱：解「數獨」問題，因為不需要任何計算，所以數學不好的人也可以享受解題樂趣。但筆者認為它可以鍛鍊解題者「掌握數獨意涵，並據以同步針對三個面向 (直行、橫列及粗線區隔出來的  $3 \times 3$  區塊) 內已出現的數字，逐步進行推理與監控之能力」。惟，其能否發揮預期之功能，仍須視所提供之「數獨」問題的難度是否符應解題者之認知負荷程度。若難度超高，將徒增解題者之挫折感，以致更加排斥數學解題而已。

事實上，即使解決如圖 1—①之簡易版「數獨」問題，都恐難於吸引數學不好的人士或國中小學童來參與，因為它是需要具備相當的專注力、耐力與細心，始能圓滿達成任務 (讀者可試著做做看)。其它更高難度之「數獨」問題 (如圖 1—②、③、④)，更甬期望「給數學不好的人也可以享受解題樂趣」了。

		9	5		1			3
4			7	9			5	
8			4			9		
6	4	7			3	1		9
				2				
9		1	6			3	8	5
		6			5			8
	5			1	4			6
3			9		8	5		

圖 1—①

		3			6	5	7	
	5			1			4	
		9		3	7		6	1
			3					4
			6	4	1			
3					2			
6	3		9	5		1		
	8			7			5	
	7	5	2			3		

圖 1—②

			2		4		3	7
					6		2	5
		2	5	7				4
				6			4	
	7		4		5		8	
	5			2				
4				3	7	1		
3	8		6					
6	9		8		2			

圖 1—③

				7			5	
9	5			8				
		6	1					7
	3				7			5
4	2			3			7	8
7			4				1	
8					9	7		
				1			6	9
	4			6				

圖 1—④

※圖 1—①、1—②引自自由時報 2011 年 7 月 2 日 E28 版，而圖 1—③、

圖 1—④則引自該報 2011 年 7 月 3 日 E28 版。

此外，現行有關「數獨」之專書、報刊及網路上所登出之內容，都僅聚焦於解題之設計，只提供許多不同缺項形式之填充問題與答案而已，未具有引導讀者建構「數獨」定義與體驗「外形互異但數學結構都相同」之活動設計，以

致也未能發揮其潛在之另類數學教育功能。

鑒於上述有關「數獨」活動設計之缺失，本文所提出之「點色皆獨」牌陣配置活動，不僅有建構「點色皆獨」牌陣之要件、體驗「外形互異但數學結構都相同」之具體意涵、輕鬆經歷「同步從多個面向（包括 4 階牌陣之各直行、橫列、對角線、四角落之  $2 \times 2$  區塊與中央之  $2 \times 2$  區塊）已出現的牌點（pip）和花色（suit）等線索來進行推理與監控」的數學思考之旅等設計，也有以任一個「點色皆獨」牌陣為原型，經由牌陣之系列變換衍生出另類「點色皆獨」牌陣及轉化為「四階魔方陣」之體驗設計，期能使得讀者充分體驗系統性數學思考之神奇威力與成功解題的樂趣，並感受到「處變不變」的數學本質之美。

限於篇幅，本文僅能先揭示筆者有關「點色皆獨」牌陣之組成要件、配置策略與要訣、配置方式及「點色皆獨」探索活動學習單之編製要領等所建構之論述，並提供基於這些論述所設計之「點色皆獨」探索活動學習單示例。至於任一個「點色皆獨」牌陣如何經由系列變換與轉化數字，衍生出另類 1151 種「點色皆獨」牌陣與 1152 種「四階魔方陣」之論述，以及其符應之體驗系統性數學思考之神奇威力的探索活動學習單示例，將於後續另以專文撰述。

## 貳、認識「點色皆獨」牌陣之組成要件及配置策略與要訣

### 一、組成「點色皆獨」牌陣之要件

#### 〈一〉16 張具「 $4P \times 4S$ 結構」之牌堆

先任意從牌點 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K 等 13 種中選定 4 種做為共同牌點，再從一副撲克牌之各種花色〈黑桃 Spade、紅心 Heart、梅花 Club、方塊 Diamond〉中分別取出 4 張具有共同牌點之牌，便可組成一組 16 張具「 $4P \times 4S$ 〈4 種牌點  $\times$  4 種花色〉結構」之牌堆。若令  $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $w$  代表從 13 種牌點中選定的 4 種共同牌點，則  $S_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 、 $S_w$ 、 $H_x$ 、 $H_y$ 、 $H_z$ 、 $H_w$ 、 $C_x$ 、 $C_y$ 、 $C_z$ 、 $C_w$ 、 $D_x$ 、 $D_y$ 、 $D_z$ 、 $D_w$ 〈 $S_x$  表示黑桃  $x$  點、 $H_y$  表示紅心  $y$  點、 $C_z$  表示梅花  $z$  點、 $D_w$  表示方塊  $w$  點，其它類推〉等 16 張牌即

## 點色皆獨

是一組 16 張具「4P×4S〈4 種牌點 × 4 種花色〉結構」之典型牌堆。

由於從 13 種牌點中選出 4 種牌點有 715 種不同的選擇方式，故可推知一副撲克牌總共可以造出 715 組具「4P×4S 結構」之不同牌堆。

### 〈二〉具「點色皆獨」之特質

將一組 16 張具「4P×4S 結構」之牌堆分散配置在 4 階方陣之 16 個方格中，使其四直行、四橫列、兩對角線、四角落之 2×2 區塊（如圖 2—③之 4 個粗框區）與中央之 2×2 區塊（如圖 2—④之粗框區）等 15 處的 4 張牌，在同一處中均具有「牌點與花色均各自獨立，絕不重複出現」之特質。由於此一牌陣的牌點與花色之分佈所具特質，如同「數獨」一般，故筆者稱此一特質為「點色皆獨」。

※當一個由 16 張具 4P×4S 結構之牌堆配置完成之 4 階牌陣，其牌點與花色之分佈具有「點色皆獨」之特質時，便稱此一牌陣為「點色皆獨」牌陣，如圖 2 之①~④均屬之。

Hy	Sx	Dz	Cw
Cz	Dw	Sy	Hx
Sw	Hx	Cx	Dy
Dx	Cy	Hw	Sz

圖 2—①

Sz	Hw	Dy	Cx
Dx	Cy	Sw	Hx
Cw	Dz	Hx	Sy
Hy	Sx	Cz	Dw

圖 2—②

Dx	Cw	Sz	Hy
Hx	Sy	Cx	Dw
Cy	Dz	Hw	Sx
Sw	Hx	Dy	Cz

圖 2—③

Cw	Dz	Hx	Sy
Sx	Hy	Dw	Cz
Dy	Cx	Sz	Hw
Hx	Sw	Cy	Dx

圖 2—④

## 二、配置「點色皆獨」牌陣之策略與要訣

配置「點色皆獨」牌陣之要訣，在於能善用「點色皆獨」之意涵來進行監控與推理，並參照以下策略 A 或策略 B 所列程序逐步施行配置任務。

### 〈一〉策略 A

1. 任意選取某一牌點之 4 張不同花色之牌，將其配置於 4 階方陣之 4 個適當空位中〈※意指不違反「點色皆獨」之意涵〉。

- 2.任意從程序 1 已配置之 4 張牌中選取某一張做為「基準牌」，再以與該「基準牌」同一花色之另 3 張不同牌點之牌，配置於 4 階方陣之另 3 個適當空位中。
- 3.再應用「每一直行、每一橫列、每一對角線、每一角落之 2×2 區塊與中央之 2×2 區塊等 15 處之 4 張牌，均需含花色 S、H、C、D 各一及牌點 x、y、z、w 各一」之**配置要訣**來進行推理與監控、將所剩之 9 張餘牌〈具 3P×3S 結構〉逐步適配於 4 階方陣之 9 個空位中。
- 4.複核牌陣是否充分滿足「點色皆獨」牌陣之要件。

## 〈二〉策略 B

- 1.任意選取某一花色之 4 張不同牌點之牌，將其配置於 4 階方陣之 4 個適當空位中〈※意指不違反「點色皆獨」之意涵〉。
- 2.任意從程序 1 已配置之 4 張牌中選取某一張做為「基準牌」，再以與該「基準牌」同一牌點之另 3 張不同花色之牌，配置於 4 階方陣之另 3 個適當空位中。
- 3.參閱策略 A 之程序 3
- 4.參閱策略 A 之程序 4

※ 策略 A 與策略 B 之程序 1、2 均具有「對偶性」，只要將策略 A 中之程序 1、2 的「牌點」一詞與「花色」一詞對換，即是策略 B 之程序 1、2。圖 3 之「點色皆獨」牌陣配置歷程圖系〈示例〉，係參照策略 A 來配置，其前兩圖依序是施行程序 1、2 對應所得，而後續五圖則參用程序 3 之配置要訣逐步推理所生。

※以下每一牌陣中以粗黑體標示之牌，表示在該階段推理新配置之牌。

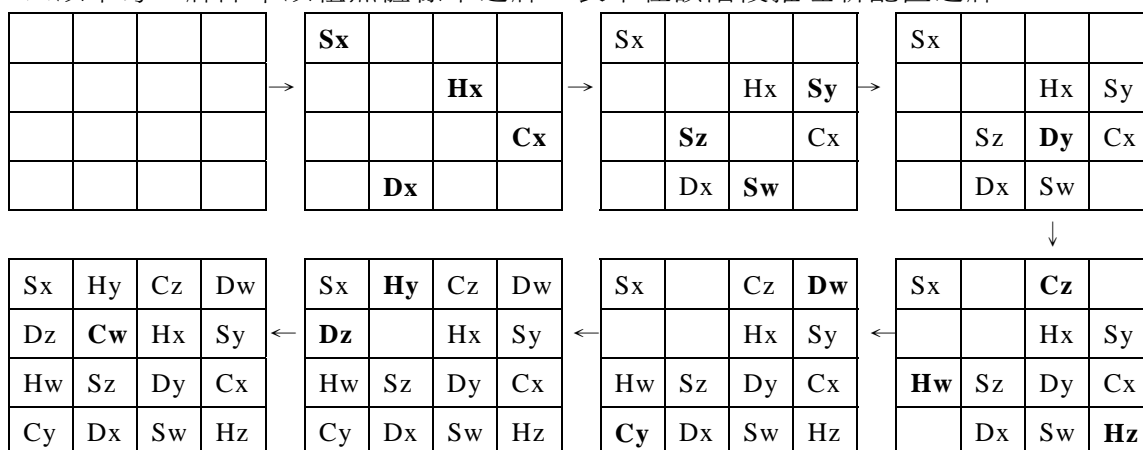


圖 3：「點色皆獨」牌陣配置歷程圖系〈示例〉

### 參、「點色皆獨」牌陣之配置方式知多少

一組 16 張具「4P×4S 結構」之牌堆及一副撲克牌，在一個具有牌位編碼之 4 階方陣（如以下之圖 4）的 16 個空位中，可以分別配置出多少種互不全等的「點色皆獨」牌陣呢？基於上述「點色皆獨」牌陣之配置策略與要訣及圖 3 之配置歷程圖系，可知無論採用策略 A 或 B，只要其程序 1 之 4 張牌與程序 2 之 3 張牌都能順利適配，則餘下之 9 張牌的適配位置就早已一一被定位了，不容彈性調配。因此，欲知一組 16 張具「4P×4S 結構」之牌堆究竟可配置出多少種互不全等的「點色皆獨」牌陣，只要先探究程序 1 之 4 張牌及程序 2 之 3 張牌各有多少種適配方式，然後再透過樹形圖或乘法原理便可推知其答數；由於一副撲克牌可以組出 715 組具「4P×4S 結構」之不同牌堆，只要將該答數再乘以 715，便是一副撲克牌可配置出互不全等的「點色皆獨」牌陣之數目。

#### 一、適用於進程序 1 與 2 之牌組

一組 16 張具「4P×4S 結構」之牌堆，其適用於進程序 1 之「同一牌點不同花色〈策略 A〉」或「同一花色不同牌點〈策略 B〉」之 4 張牌，共有〈Sx、Hx、Cx、Dx〉、〈Sy、Hy、Cy、Dy〉、〈Sz、Hz、Cz、Dz〉、〈Sw、Hw、Cw、Dw〉、〈Sx、Sy、Sz、Sw〉、〈Hx、Hy、Hz、Hw

〉、〈Cx、Cy、Cz、Cw〉、〈Dx、Dy、Dz、Dw〉等 8 組選擇方式。無論進程序 1 之 4 張牌是選自 8 組中的那一組，當完成其適配任務後，後續之程序 2 可使用的 3 張牌均會有 4 組選擇方式，以程序 1 使用〈Sx、Hx、Cx、Dx〉進行配置為例，則適用於進程序 2 的 3 張牌將有〈Sy、Sz、Sw〉、〈Hy、Hz、Hw〉、〈Cy、Cz、Cw〉、〈Dy、Dz、Dw〉等 4 組選擇方式。因此，欲利用一組 16 張具「4P×4S 結構」之牌堆來配置任一「點色皆獨」牌陣時，從 16 張牌中先選出 7 張牌來進程序 1 與 2 的方式，總共會有  $4 \times 8 = 32$  組不同的選擇方式（詳參下列表三之 1 與 2 的左端欄位所示，即配置圖三之程序 1、2 的 32 種適用牌組）。

## 二、程序 1 之 4 張牌的適配牌位空間

為了探究程序 1 所選定之 4 張牌有多少種可行的適配方式，首先將四階方陣之 16 個方格加以編碼（如圖四），以做為記錄各組適配牌位空間之依據。然後依序以編碼①~⑱之牌位，逐一作為首張牌配置的牌位，接著再配置其它 3 張牌，並登錄其適配牌位空間之牌位編碼。最後，再依牌位編碼由小到大的順序將這 4 張牌的各組適配牌位空間加以統整，結果顯示：無論程序 1 之 4 張牌是「同一牌點不同花色」或「同一花色不同牌點」，其可行之適配牌位空間，都僅限於表一所列 P1~P8 等 8 組適配牌位編碼所指牌位。

表一 程序 1 之 4 張牌的 8 組適配牌位空間之編碼

①	②	③	④
⑤	⑥	⑦	⑧
⑨	⑩	⑪	⑫
⑬	⑭	⑮	⑯

圖 4

組別	適配牌位編碼	組別	適配牌位編碼
P1	①、⑦、⑬、⑭	P5	③、⑤、⑩、⑱
P2	①、⑧、⑩、⑮	P6	③、⑥、⑫、⑬
P3	②、⑦、⑨、⑱	P7	④、⑤、⑪、⑭
P4	②、⑧、⑪、⑬	P8	④、⑥、⑨、⑮

由於程序 1 之 4 張牌在 P1~P8 等 8 組適配牌位空間的每一組中，均有  $4! = 24$  種互不全等的配置方式。因此，程序 1 之 4 張牌在圖 4 之 4 階方陣中共有  $24 \times 8 = 192$  互不全等的配置方式。

### 三、程序 2 之 3 張牌的適配牌位空間

由於適用於程序 2 之 3 張牌，得視您是以程序 1 之 4 張牌中的那一張做為基準牌來選定。因此，程序 2 之 3 張牌的適配牌位空間位置，勢必也會隨著基準牌之牌位編碼而改變。經探究結果顯示：無論所選定之基準牌是什麼花色或什麼牌點？基準牌所在之牌位編碼是什麼？其所伴隨之程序 2 的 3 張牌之適配牌位空間，都分別僅有 3 個牌位可供彈性調配，亦即程序 2 的 3 張牌有  $3! = 6$  種不同的配置方式。當以表一之 P1 組的適配牌位空間〈①、⑦、⑬、⑱〉來配置程序 1 之 4 張牌時，其所伴隨之程序 2 的 3 張牌之適配牌位空間，如表二所示（※其它以表一之 P2 組~P8 組來配置程序 1 之 4 張牌時，其所伴隨之程序 2 的 3 張牌之適配牌位空間，讀者也可參照表二所示加以類推）。

表二 P1 組所伴隨之程序 2 的 3 張牌之適配牌位空間

基準牌之牌位編碼	程序 2 之 3 張牌的適配牌位空間
①	〈⑧、⑩、⑮〉，即 P2 - ①
⑦	〈②、⑨、⑱〉，即 P3 - ⑦
⑬	〈③、⑥、⑬〉，即 P6 - ⑬
⑱	〈④、⑤、⑪〉，即 P8 - ⑱

※P2 - ①表示表一之 P2 組〈①、⑧、⑩、⑮〉扣除基準牌之牌位編碼①所餘之 3 個牌位，其它類推。

### 四、「點色皆獨」牌陣之配置方式

依據上述一、二、三之探究結果，程序 1 之 4 張牌在圖 4 之 4 階方陣中共有  $24 \times 8 = 192$  種互不全等的配置方式，而其每一種配置方式之後續所伴隨的程序 2 之 3 張牌，也都有 6 種不同的配置方式，所以適用於程序 1、2 之每一牌組的 7 張牌在圖 4 之 4 階方陣中，都會有  $6 \times 192 = 1152$  種互不全等的配置方式。又因完成程序 1、2 之適配任務後，進程序 3 所用的 9 張牌之適配牌位均已被定位，毫無彈性調配空間，故可推知「無論進程序 1、2 所用的 7 張牌是取自那一組（※從 16 張具  $4P \times 4S$  結構之牌堆中選出 7 張牌來進程序 1 與 2，總共會有  $4 \times 8 = 32$  組不同的選擇方式），在圖 4 之 4 階方陣中均可配置出 1152 種互不全等的『點色皆獨』牌陣」。



以不同的牌組（有 32 組且每一組 7 張）來進程序 1、2，各組配置出來之 1152 種「點色皆獨」牌陣所形成的牌陣集合是否相等？事實上各牌陣集合都會相等。這可從任一個「點色皆獨」牌陣，都可分別以 32 組不同的牌組來進程序 1、2，雖然各組之 7 張牌所配置出來的牌陣內容互不全等，但再經程序 3 之 9 張牌完成適配之後，即可歸於同一「點色皆獨」牌陣。以圖 3 之配置為例，只要參照表三之 32 種不同的牌組及其各牌依序對應之牌位編碼來配置，逐一先進程序 1、2 之 7 張牌的配置作業，再參照程序 3 之配置要訣來配置剩餘的 9 張牌，最終都會得到一個與圖 3 全等之「點色皆獨」牌陣（讀者可試做看看！）。

以下表三之 1、2，其左欄旨在呈現配置圖 3 之程序 1、2 作業所適用之 32 組牌（策略 A 與策略 B 各 16 組）；其中欄則在指示左欄牌組之各牌依序對應之適配牌位編碼（以表三之 1 的最上欄之適用牌組  $S_x$ 、 $H_x$ 、 $C_x$ 、 $D_x$ 、 $S_y$ 、 $S_z$ 、 $S_w$  為例，則各牌對應之適配牌位編碼如下： $S_x \rightarrow \textcircled{1}$ 、 $H_x \rightarrow \textcircled{7}$ 、 $C_x \rightarrow \textcircled{12}$ 、 $D_x \rightarrow \textcircled{14}$ 、 $S_y \rightarrow \textcircled{8}$ 、 $S_z \rightarrow \textcircled{10}$ 、 $S_w \rightarrow \textcircled{15}$ ）；而其右欄「所屬適配牌位空間之組別」之資料，旨在協助讀者連結左欄之「程序 1、2 之適用牌組」及中欄之「各牌依序對應之適配牌位編碼」，與表一、二所列適配牌位空間之組別關係。

表三之 1 以策略 A 配置圖 3 之前 7 張牌的適用牌組及各牌依序對應之適配牌位編碼

程序 1、2 之適用牌組		各牌依序對應之適配牌位編碼		所屬適配牌位空間之組別	
程序 1	程序 2	程序 1	程序 2	程序 1	程序 2
Sx、Hx、Cx、Dx	Sy、Sz、Sw	①、⑦、 <del>12</del> 、 <del>14</del>	⑧、 <del>10</del> 、 <del>15</del>	P1	P2 - ①
Sx、Hx、Cx、Dx	Hy、Hz、Hw	①、⑦、 <del>12</del> 、 <del>14</del>	②、 <del>16</del> 、⑨	P1	P3 - ⑦
Sx、Hx、Cx、Dx	Cy、Cz、Cw	①、⑦、 <del>12</del> 、 <del>14</del>	<del>13</del> 、③、⑥	P1	P6 - <del>12</del>
Sx、Hx、Cx、Dx	Dy、Dz、Dw	①、⑦、 <del>12</del> 、 <del>14</del>	<del>11</del> 、⑤、④	P1	P8 - <del>14</del>
Sy、Hy、Cy、Dy	Sx、Sz、Sw	⑧、②、 <del>13</del> 、 <del>11</del>	①、 <del>10</del> 、 <del>15</del>	P4	P2 - ⑧
Sy、Hy、Cy、Dy	Hx、Hz、Hw	⑧、②、 <del>13</del> 、 <del>11</del>	⑦、 <del>16</del> 、⑨	P4	P3 - ②
Sy、Hy、Cy、Dy	Cx、Cz、Cw	⑧、②、 <del>13</del> 、 <del>11</del>	<del>12</del> 、③、⑥	P4	P6 - <del>13</del>
Sy、Hy、Cy、Dy	Dx、Dz、Dw	⑧、②、 <del>13</del> 、 <del>11</del>	<del>14</del> 、⑤、④	P4	P8 - <del>11</del>
Sz、Hz、Cz、Dz	Sx、Sy、Sw	<del>10</del> 、 <del>16</del> 、③、⑤	①、⑧、 <del>15</del>	P5	P2 - <del>10</del>
Sz、Hz、Cz、Dz	Hx、Hy、Hw	<del>10</del> 、 <del>16</del> 、③、⑤	⑦、②、⑨	P5	P3 - <del>16</del>
Sz、Hz、Cz、Dz	Cx、Cy、Cw	<del>10</del> 、 <del>16</del> 、③、⑤	<del>12</del> 、 <del>13</del> 、⑥	P5	P6 - ③
Sz、Hz、Cz、Dz	Dx、Dy、Dw	<del>10</del> 、 <del>16</del> 、③、⑤	<del>14</del> 、 <del>11</del> 、④	P5	P8 - ⑤
Sw、Hw、Cw、Dw	Sx、Sy、Sz	<del>15</del> 、⑨、⑥、④	①、⑧、 <del>10</del>	P7	P2 - <del>15</del>
Sw、Hw、Cw、Dw	Hx、Hy、Hz	<del>15</del> 、⑨、⑥、④	⑦、②、 <del>16</del>	P7	P3 - ⑨
Sw、Hw、Cw、Dw	Cx、Cy、Cz	<del>15</del> 、⑨、⑥、④	<del>12</del> 、 <del>13</del> 、③	P7	P6 - ⑥
Sw、Hw、Cw、Dw	Dx、Dy、Dz	<del>15</del> 、⑨、⑥、④	<del>14</del> 、 <del>11</del> 、⑤	P7	P8 - ④

表三之 2 以策略 B 配置圖 3 之前 7 張牌的適用牌組及各牌依序對應之適配牌位編碼

程序 1、2 之適用牌組		各牌依序對應之適配牌位編碼		所屬適配牌位空間之組別	
程序 1	程序 2	程序 1	程序 2	程序 1	程序 2
Sx、Sy、Sz、Sw	Hx、Cx、Dx	①、⑧、⑩、⑮	⑦、⑫、⑭	P2	P1-①
Sx、Sy、Sz、Sw	Hy、Cy、Dy	①、⑧、⑩、⑮	②、⑬、⑪	P2	P4-⑧
Sx、Sy、Sz、Sw	Hx、Cx、Dx	①、⑧、⑩、⑮	⑫、③、⑤	P2	P5-⑩
Sx、Sy、Sz、Sw	Hw、Cw、Dw	①、⑧、⑩、⑮	⑨、⑥、④	P2	P7-⑮
Hx、Hy、Hz、Hw	Sx、Cx、Dx	⑦、②、⑫、⑨	①、⑫、⑭	P3	P1-⑦
Hx、Hy、Hz、Hw	Sy、Cy、Dy	⑦、②、⑫、⑨	⑧、⑬、⑪	P3	P4-②
Hx、Hy、Hz、Hw	Sz、Cz、Dz	⑦、②、⑫、⑨	⑩、③、⑤	P3	P5-⑫
Hx、Hy、Hz、Hw	Sw、Cw、Dw	⑦、②、⑫、⑨	⑮、⑥、④	P3	P7-⑨
Cx、Cy、Cz、Cw	Sx、Hx、Dx	⑫、⑬、③、⑥	①、⑦、⑭	P6	P1-⑫
Cx、Cy、Cz、Cw	Sy、Hy、Dy	⑫、⑬、③、⑥	⑧、②、⑪	P6	P4-⑬
Cx、Cy、Cz、Cw	Sz、Hz、Dz	⑫、⑬、③、⑥	⑩、⑫、⑤	P6	P5-③
Cx、Cy、Cz、Cw	Sw、Hw、Dw	⑫、⑬、③、⑥	⑮、⑨、④	P6	P7-⑥
Dx、Dy、Dz、Dw	Sx、Hx、Cx	⑭、⑪、⑤、④	①、⑦、⑫	P8	P1-⑭
Dx、Dy、Dz、Dw	Sy、Hy、Cy	⑭、⑪、⑤、④	⑧、②、⑬	P8	P4-⑪
Dx、Dy、Dz、Dw	Sz、Hz、Cz	⑭、⑪、⑤、④	⑩、⑫、③	P8	P5-⑤
Dx、Dy、Dz、Dw	Sw、Hw、Cw	⑭、⑪、⑤、④	⑮、⑨、⑥	P8	P7-④

基於上述可知：一組 16 張具「4P×4S 結構」之牌堆，在圖 4 之 4 階方陣中，只可配置出 1152 種互不全等的「點色皆獨」牌陣；而一副撲克牌因可組成 715 組具「4P×4S 結構」之不同牌堆，故總共可配置出  $1152 \times 715 = 823680$  種互不全等的「點色皆獨」牌陣。

## 肆、設計「點色皆獨」探索活動學習單之要領

鑑於善用「點色皆獨」之意涵，是解決「點色皆獨」問題之主要先備知能。因此設計「點色皆獨」探索活動學習單時，宜先設計若干足以引導參與者建構「點色皆獨」之具體意涵與辨識「點色皆獨」牌陣之系列問題，做為前導探索活動；接著再從某些「點色皆獨」牌陣中移出若干張牌，編製成各種難度級數不同之「點色皆獨」問題，並將待回填之各牌揭示於缺項牌陣之旁，以利參與者解題。

### 一、設計前導探索活動之流程與旨意

- (一) 提供若干「點色皆獨」牌陣及建構「組成『點色皆獨』牌陣之要件」的系列問題，要求參與者逐一觀察「每一牌陣之各直行、各橫列、各對角線、各角落之  $2 \times 2$  區塊與中央之  $2 \times 2$  區塊」等 15 處的 4 張牌，在同一處中是否均具有「牌點與花色均各自獨立，絕不重複出現」，以及各牌陣之 16 張牌是否均具有 4 種牌點與 4 種花色（即  $4P \times 4S$  之結構）。
- (二) 利用（一）之探索結果，引介「點色皆獨」與「外形互異數學結構相同」等語詞之具體意涵，進而宣告「點色皆獨」牌陣之名稱與組成要件。
- (三) 提供若干「點色皆獨」牌陣之正例與非例，讓參與者應用（一）、（二）之學習所得進行區辨。
- (四) 提供有關「位於『點色皆獨』牌陣四頂端之牌的牌點或花色是否會有重複出現的現象」之系列問題，以引導參與者認識與應用「窮舉法」及「反證法」，來推論組成「點色皆獨」牌陣之要件的新引理（即位於『點色皆獨』牌陣四頂端之 4 張牌的牌點與花色也是各自獨立互不重複）。

### 二、設計與使用「點色皆獨」缺項牌陣問題須知

- (一) 每一「點色皆獨」缺項牌陣問題至少需有 8 個待回填之空位
- (二) 每一「點色皆獨」缺項牌陣問題之旁均需附上待回填之牌

- (三) 依回填初期所需監控之範圍大小及推理步驟之多寡，做為概分問題難度級數（從最簡易到最難依序可區分 A、B、C、D、E、F、G、H 等 8 級）之參考依計據。
- (四) 使用「點色皆獨」缺項牌陣問題給參與者解題時，切勿提供難度級數超越其數學思考力水準之問題。對於能力優秀者，也可提供一個完全空白之 4 階方陣及一副撲克牌，讓其自行建購一個完備的「點色皆獨」牌陣（即 H 級問題）。
- (五) 解「點色皆獨」問題時，對於國小學童或數學能力欠佳之社會人士，宜以撲克牌來佈置待填之牌陣問題並提供有關之附牌，以利其以撲克牌實際操作完成解題任務。因此，需為每一位參與者準備一張「畫有 16 個 9cm×6 cm 之矩形方格所組成的 4×4 矩形方陣，且如圖 4 在每一空格中依序設定一個牌位編碼」之 A3 紙本，來做為牌陣配置之基底。

## 伍、「點色皆獨」探索活動學習單（示例）

本示例係參照上述有關「點色皆獨」之論述與設計要領編撰而成，其適用對象、活動目標及學習單內容分別如下：

一、適用對象：10 歲以上之學生或社會人士

二、活動目標：

- (一) 啓迪樂於探索數學之興趣與鑑賞「點色皆獨」牌陣之美
- (二) 鍛鍊同步綜觀多面向已知條件進行推理與監控之數學思考力
- (三) 理解「點色皆獨」牌陣之組成要件並善用於解決有關「點色皆獨」之問題
- (四) 體驗歸謬法與窮舉法在解題推理上的應用

三、活動學習單之示例內容

※以下各牌陣中每一張牌之代號的第一個英文大寫字母表示花色（即 S 代表黑桃、H 代表紅心、C 代表梅花、D 代表方塊），而其後續右下角之小

## 點色皆獨

字 (A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K) 則表示該張牌之牌點，如 SK 表示黑桃 K、C5 表示梅花 5，其它類推。

### (一) 認識「點色皆獨」牌陣

1. 觀察圖 1~ 3 各牌陣之 16 張牌的牌點與花色回答表一中各問題，並將答案填在表一各牌陣圖對應之欄位中。

H2	C4	D3	SA
DA	S3	H4	C2
S4	D2	CA	H3
C3	HA	S2	D4

圖 1

D4	H3	SA	C2
S2	CA	D3	H4
C3	S4	H2	DA
HA	D2	C4	S3

圖 2

CQ	SA	DK	HJ
HK	DJ	SQ	CA
SJ	CK	HA	DQ
DA	HQ	CJ	SK

圖 3

表一 圖 1~3 各牌陣之牌點與花色的數量與排列特性

待答問題	圖 1 之牌陣	圖 2 之牌陣	圖 3 之牌陣
① 牌陣中有幾種花色？每一花色各有幾張？			
② 牌陣中有幾種牌點？每一牌點各有幾張？			
③ 同一直行之 4 張牌的花色都不一樣嗎？牌點呢？			
④ 同一橫列之 4 張牌的花色都不一樣嗎？牌點呢？			
⑤ 對角線之 4 張牌的花色都不一樣嗎？牌點呢？			
⑥ 各角落的 2×2 區塊之 4 張牌的花色都不一樣嗎？牌點呢？			
⑦ 中央的 2×2 區塊之 4 張牌的花色都不一樣嗎？牌點呢？			

## 2. 組成「點色皆獨」牌陣之要件

(1) 16 張 具「 $4P \times 4S$  結構」之牌堆

當 16 張撲克牌恰含「4 種牌點與 4 種花色，即同一牌點或同一花色之牌均各 4 張」時，可稱這 16 張牌具有「 $4P \times 4S$  結構」之特性。

① 圖 1 之牌陣中的 16 張牌具有「 $4P \times 4S$  結構」嗎？圖 2 及圖 3 呢？

② 一副撲克牌可組合出幾組“16 張具「 $4P \times 4S$  結構」之牌堆”？（※9 年級以下之參與者可跳過本問題）

(2) 具有「點色皆獨」之特質

當一個 4 階牌陣之「同一直行（有 4 行）、同一橫列（有 4 列）、同一對角線（有 2 條）、同一角落之  $2 \times 2$  區塊（有 4 個角落）及中央之  $2 \times 2$  區塊」等 15 處之 4 張牌，在同一處中均具有「花色與牌點各自獨立，絕不重複出現」的特質時，我們可稱這個牌陣具有「點色皆獨」之特質。

※當一個 4 階牌陣之 16 張牌具有「 $4P \times 4S$  結構」且其花色與牌點的分佈也具有「點色皆獨」之特質時，我們就稱此一 4 階牌陣為「點色皆獨」牌陣，例如圖 1 之牌陣就是一個「點色皆獨」牌陣。

① 圖 2 之 16 張牌已具有「 $4P \times 4S$  結構」，其花色與牌點的分佈也具有「點色皆獨」之特質嗎？它配稱是一個「點色皆獨」牌陣嗎？

② 圖 3 是一個「點色皆獨」牌陣嗎？

## 3. 認識「外型相異但數學結構相同」之具體意涵

※外型互異（即不全等）之一組物件，若其內在具有某些共同的數學特質，可稱它們是一組「外型互異但數學結構相同」之物件。

(1) 圖 1~3 各牌陣之外型都相同（即全等）嗎？

(2) 圖 1~3 各牌陣之 16 張牌都具有「 $4P \times 4S$  結構」嗎？其花色與牌點的分佈也都具有「點色皆獨」之特質嗎？

(3) 圖 1~3 等 3 個「點色皆獨」牌陣是一組「外型互異但數學結構相同」之牌陣嗎？

4. 區辨「點色皆獨」牌陣

逐一區辨下列圖 4~7 之各 4 階牌陣是否配稱「點色皆獨」牌陣

D4	S2	H3	C5
H5	C3	D2	S4
C2	H4	S5	D3
S3	D5	C4	H2

圖 4

H2	C6	D10	S4
D3	S7	HJ	C5
S4	D8	CQ	H6
C5	H9	SK	D7

圖 5

S4	C3	H5	D6
D5	H6	D6	C3
C6	D4	S3	H6
H3	S6	C4	D5

圖 6

CA	DK	HQ	SJ
SQ	HJ	DA	CK
DJ	CQ	SK	HA
HK	SA	CJ	DQ

圖 7

- (1) 圖 4~7 中那些是「點色皆獨」牌陣？
- (2) 圖 5 的花色與牌點的分佈具有「點色皆獨」之特質嗎？為什麼它不配稱「點色皆獨」牌陣呢？
- (3) 圖 6 之 16 張牌具有「4P×4S 結構」嗎？為什麼它不配稱「點色皆獨」牌陣呢？

(二) 體驗歸謬法與窮舉法在解題推理上的應用已知右圖為一「點色皆獨」牌陣，牌陣中所列英文字母係其各牌之代號，A、M、P、D 等 4 張牌為其四個頂端之牌，請參考右圖依序回答下列問題。

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>
<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>L</b>
<b>M</b>	<b>N</b>	<b>O</b>	<b>P</b>

1. 下列各牌組中可以確定其 4 張牌不可能發生「牌點或花色重複出現」之現象的牌組有那些？
  - ① (C、G、K、O)    ② (E、F、G、H)    ③ (D、G、J、M)
  - ④ (A、M、P、D)    ⑤ (A、B、E、F)    ⑥ (F、G、J、K)
  - ⑦ (B、G、L、M)    ⑧ (A、F、L、O)    ⑨ (C、F、L、M)
2. 為什麼 A 牌之牌點與花色都不可能與 M 牌相同？
3. 為什麼 A 牌之牌點與花色都不可能與 P 牌相同？
4. 為什麼 A 牌之牌點與花色都不可能與 D 牌相同？
5. 為什麼 M 牌之牌點與花色都不可能與 P 牌相同？
6. 為什麼 M 牌之牌點與花色都不可能與 D 牌相同？
7. 為什麼 P 牌之牌點與花色都不可能與 D 牌相同？
8. 任一「點色皆獨」牌陣四頂端之牌的牌點與花色都是各自獨立絕不重複出現嗎？



9. 已知某一 4 階牌陣四頂端之 4 張牌的牌點有 2 張相同，這是「點色皆獨」牌陣嗎？
10. 已知某一 4 階牌陣四頂端之 4 張牌的花色有 2 張相同，這是「點色皆獨」牌陣嗎？
11. 如果上圖之「點色皆獨」牌陣的 **A** 牌之花色與牌點是 **D4**、**M** 牌是 **HA**、**P** 牌是 **S3**、**K** 牌是 **H7**，右上角之 **D** 牌的花色與牌點會是什麼？

(三) 解「點色皆獨」問題

將附牌區各牌填入其右側之牌陣的空位中，使牌陣之花色與牌點的分佈具有「點色皆獨」之特質。以下各級「點色皆獨」問題，從 A 級~H 級之難度循序提昇，務請先完成初級問題再挑戰更高階之問題。

1. A 級

①

附牌			
H5	H6		H8
C5			C8
D5	D6		D8

→

待填牌陣			
S7			
	C6	S8	H7
	D7		S6
	S5	C7	

②

附牌			
SA	S2	S3	
CA			
DA	D2	D3	

→

待填牌陣			
HA	C2		D4
S4		H2	
		C4	H3
C3	H4		

2. B 級

①

附牌			
S6	S7	S8	
H6	H7	H8	
C6	C7	C8	

→

待填牌陣			
C9		D6	
	D8	S9	
			D9
D7	H9		

②

附牌			
	S6	S7	S8
	H6	H7	H8
	D6	D7	D8

→

待填牌陣			
			C5
H5	C8		
C7		S5	
	D5	C6	

3. C 級

①

附牌				→	待填牌陣			
SA	S2	S3			C3			
HA			H4			S4	H3	
CA			C4			C2	DA	
	D2	D3	D4					H2

②

附牌				→	待填牌陣			
SA	S2	S3					C2	D3
		H3	H4				S4	HA
		C3	C4			H2		
DA	D2		D4		CA			

4. D 級

①

附牌				→	待填牌陣			
SA	S2		S4			D3		
HA	H2		H4					C3
CA	C2		C4				S3	
DA	D2		D4		H3			

②

附牌				→	待填牌陣			
							SA	
HA	H2	H3	H4		S4			
CA	C2	C3	C4			S3		
DA	D2	D3	D4					S2

5. E 級

①

附牌				→	待填牌陣			
SA	S2		S4					CA
HA		H3	H4				S3	
	C2	C3	C4			D4		
DA	D2	D3			H2			

②

附牌				→	待填牌陣			
SA	S2	S3			S4			H3
HA	H2		H4					
	C2	C3	C4					
DA		D3	D4		CA			D2

6. F 級

①

附牌				→	待填牌陣			
S6	S7	S8			D6			
	H7	H8	H9					H6
C6	C7	C8	C9					
	D7	D8	D9					S9

②

附牌				→	待填牌陣			
SA		S3	S4			D3		S2
HA	H2	H3	H4				D4	
CA	C2	C3	C4					
DA	D2							

7. G 級

①

附牌				→	待填牌陣			
SA	SJ	SQ	SK			HK		
HA	HJ	HQ						
CA	CJ	CQ	CK					
DA	DJ	DQ		DK				

②

附牌				→	待填牌陣			
SA	S2	S3	S4			C3		
HA	H2	H3	H4					C2
CA			C4					
DA	D2	D3	D4					

8. H 級

①從一副撲克牌中自選 1 組具「4P×4S 結構」之 16 張牌，分別填入下列②之「附牌」欄中。

②利用所選附牌分別在其伴隨之 4 階空白方陣中，配置出 a、b、c 等 3 個外型不同之「點色皆獨」牌陣。

※所選之 16 張牌與配置所成之牌陣，不宜與本學習單之前所揭示或配置完成之「點色皆獨」牌陣相同。

附牌	待填牌陣 a	待填牌陣 b	待填牌陣 c

## 陸、結語

「點色皆獨」一文之誕生，緣起於作者以數學教育觀點評論時下所出刊之「數獨」問題的設計方式所顯示之缺失，加上作者樂於研發與推廣「以撲克牌為媒介之智趣數學探索活動」的強烈動機之持續支持，始能順利將心中有關「點色皆獨」牌陣所建構之想法，釋放轉成系統性的書面論述，並據以編製符應各項論述及數學教學原理之探索活動學習單。

探索本文所揭示之「點色皆獨」活動學習單，其所伴隨之數學教育功能，絕對超越時下流行之解「數獨」問題活動，尤其更適合 10 歲以上學童或害怕數學之人士來參與，而且所需探索工具撲克牌一副之市價才區區 15 元而已，何況後續還有可讓參與者進一步體驗系統性數學思考之神奇威力的各項探索活動（包括「點色皆獨」牌陣之各種變換與轉化 4 階魔方陣，限於篇幅容後再揭示）。

事實上，除了「數獨」之外，時下已出刊有關「趣味數學遊戲或謎題」之書報，大多也如「數獨」一般，僅聚焦於直接提供謎題與解答而已，鮮少出現以數學教育的觀點來編製成漸近式的系統性探究活動，以致不易充分發揮其潛在之另類數學教育功能。本文旨在拋磚引玉，期盼對於此一議題有興趣之人士一齊來共襄盛舉，以利更有效的經由此一體制外的「趣味數學遊戲或謎題」系列探究活動，來強化學校數學教育對於「數學思考」訓練上的不足，進而提昇國民之素質（數學思考力之水準是評定國民素質優劣的重要指標之一（請參閱林燈茂, 2011, 頁 42））。

## 參考文獻

- 玩玩數獨（2011 年 7 月 2 日）。自由時報（週末生活版）。E28 版。
- 玩玩數獨（2011 年 7 月 3 日）。自由時報（週末生活版）。E28 版。
- 林燈茂（2011）。數學思考真實案例：「雙重黑色星期五」事件之探討。屏東教大科學教育，33 期，41~55。