

「部份理解」之於學習的重要性

林裕翔

國立屏東教育大學數理教育研究所研究生

壹、前言

常常會聽到這樣的一句話：「學數學的過程不能死背，要理解。」身為一個數學教育的工作者，「理所當然」認同這樣的說法，但是經過一段時間的教學之後，筆者發現在學生學習的過程中，所謂的「理解」讓人無法清楚定義。為什麼筆者會認為「理解」讓人無法清楚定義呢？例如筆者在教學現場常碰到以下的狀況，國一上學期的時候，同學都會學習解一元一次方程式，然後再利用所學的一元一次方程式解應用問題。教師在教授一元一次方程式的時候，通常會搭配等量公理，進而希望學生能夠作出有意義的學習，而不只是死背一元一次方程式的解法。

但是矛盾的地方就出現了，我們擔心學生死背一元一次方程式的解法，因而利用天平作為教材，並且搭配等量公理的學習。但是學習一元一次方程式的目的，卻是希望學生可以利用一元一次方程式解決應用問題。在教學現場筆者發現，學生雖然能夠利用一元一次方式將應用問題解出，但是如果限制其不可以使用一元一次方程式，同樣的問題，卻會造成解題上的困擾。更精確的說法是，該學生學會利用了一元一次方程式這樣的工具解決問題，但是不見得理解該題目。因此筆者產生疑問，此時，我們能夠說該學生理解該題目嗎？

筆者認為會發生這樣的情形，主要是因為一元一次方程式就是幫助解題者省去思考過程的一種工具。因為解題者可以直接從題目的敘述列出一元一次方程式，並且利用解方程式的機械化過程，省去中間的思考，直接將答案解出。此時教學者通常會認為學生已經可以理解該題目，不過事實上他並沒有完全理解每一個細節，筆者將這樣子的理解稱為「部份理解」。因此也產生了新的問題，難道我們必須要讓學生都是「完全理解」嗎？

貳、「完全理解」與「部份理解」的差別

在回答此問題前，筆者將對「理解」進行說明。Skemp(1987/1995)主要將理解分為兩種，一種是「關係式理解(relational understanding)」，另一種是「工具式理解(instrumental understanding)」。「關係式理解」指的就是在學習過程中，了解其背後的原理之後再加以學習，也就是所謂的「知其然又知其所以然」；「工具式理解」指的是雖然不了解其背後的原理，但是以強迫自己記憶的方式加以學習，也就是所謂的「知其然但不知其所以然」。

如筆者在前言所提到，學生雖然會利用一元一次方程式這樣的工具解決問題，但是卻不見得理解該題目，此時學生到底是「知其所以然」還是「不知其所以然」呢？對學生來說，拿掉一元一次方程式這個工具後，雖然他無法利用其他方式解決該問題，但是他會認為他能夠以一元一次方程式解決該問題，就是已經「理解」了，但是其實對於這個題目，他並非完全理解每一個細節，而這樣的理解就是筆者所定義的「部份理解」；相對於「部份理解」，學生除了能夠利用一元一次方程式這樣的工具解決問題，也確實能夠理解該題目的細節，甚至在拿掉方程式這個工具後，亦能直接解決問題，那麼這樣就稱為「完全理解」。

參、「部份理解」的模型之理論基礎

筆者將在下一段提出的「部份理解」的模型，在此先對於此模型的由來加以說明。此模型的由來主要是參考 Skemp(1987/1995)所提出的「概念性聯結(conceptual connection)」與「組織性聯結(associative connection)」。舉個例子，如果要記下「3、6、9、12、15、18、21、24」的數列，由於該數列為等差數列，有其規律性，所以了解規律之後，此數列就不需要死背，可以直接使用推理的方式寫出，如此一來在記憶時所形成的聯結就稱為「概念性聯結」；但是如果要記下「89、47、36、74、92、54、37、67」這個數列，由於此數列並沒有規則可言，因此在記下的過程中所形成的聯結稱為「組織性聯結」。Skemp 也提到我們在學習的時候，需要不同比例的「概念性聯結」和「組織性聯結」作搭配。換言之，學習者在學習的過程當中，即使被學習的事物可以完全達到「概念性聯結」，但是會由於學習者個人的學習狀況，並非全然都達到

「部份理解」之於學習的重要性

「概念性聯結」，中間某些部份可能會形成「組織性聯結」，而這樣的聯結所形成的理解，即是筆者所主張的「部份理解」。

不過有別於 Skemp 將概念與概念之間的聯結分為「概念性聯結」與「組織性聯結」，筆者在此企圖修改 Skemp 所提出的兩種聯結，進而綜合統整提出「部份理解」的模型。

肆、「部份理解」的模型

一、無機鏈

首先筆者做了一個假設，就是「概念與概念之間都是由一種『無機鏈』所連結」，如圖 1。



圖 1 概念與概念之間由「無機鏈」所連結

所謂的「無機鏈」只能連結兩個概念，不過其連結是脆弱但快速的，而且「無機鏈」中無法再加入其他概念。例如在學生在背誦九九乘法時，會背「六七四十二」，也就是把 6×7 和 42 這兩個概念直接連接起來，但是卻不知道為什麼，我們會說該學生對於這兩個概念的連結並不理解。

此時我們會希望學生經過有意義的學習之後，再來記下這樣的結果。所謂有意義的學習就是要理解乘法的意義，然而要理解乘法的意義之前，必須先理解加法的意義，理解加法的意義之前，要先理解自然數的意義、……，如此一來我們會發現，如果當下要有意義的學習，必然要連結之前所學過的許許多多的小概念，才是真正的理解。換句話說，其中的小概念可能是多到不計其數，所以筆者認為在理想的狀況下，兩個概念之間是以「無限多個」小概念連結而成，此時小概念與小概念之間的無機鏈就會變得相當相當的短，如此一來，使

得這樣的無機鏈短到可被忽略，如圖 2。筆者稱這樣的理解為「完全理解」。

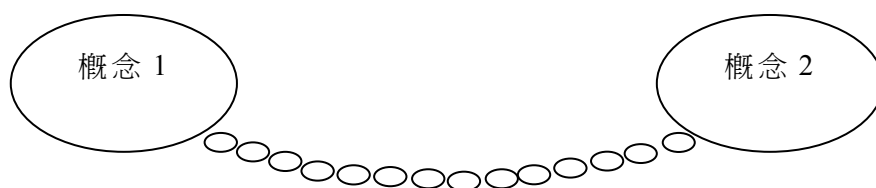


圖 2 兩個概念之間是以「無限多個」小概念連結而成

二、有機鏈

但是我們實際在學習的時候，並不會真正去想過每一個小概念，甚至有些小概念並沒有被完整的學習，我們的學習還是能夠進行，這又是為什麼呢？筆者認為，我們在學習的過程中，追求的其實並不是「完全理解」，如果我們追求完全理解的話，一來學習相當沒有效率，二來若是在成長過程中有一個小概念沒有學到，那就不就沒有辦法繼續學習了嗎？

因此筆者認為我們在學習過程中所追求的理解，其實是「部份理解」，所謂的「部份理解」是指兩個概念之間的「間距」只需要被「足夠」的小概念所填滿即可，而不需要經由無限多個小概念連結，這樣的聯結筆者稱之為「有機鏈」，如圖 3。

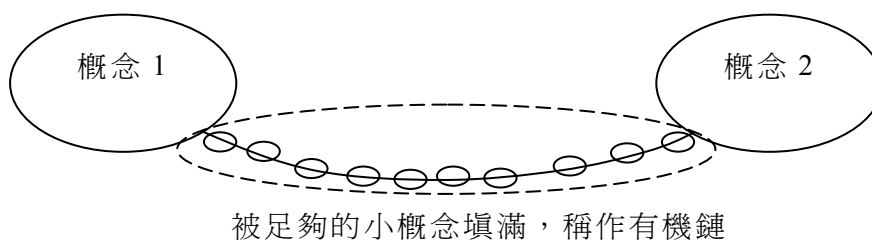


圖 3 有機鏈

為什麼筆者強調要被「足夠」的小概念填滿呢？因為兩個概念之間如果沒有「足夠」的小概念作為連結，此時小概念與小概念間的無機鏈就會過長，這

樣的學習過程就會讓學習者產生困擾，他就會感到「不理解」，雖然依舊可以達到學習的成果，但是其中過程的連結就會相當的痛苦，不過由於中間的小概念較少，使得執行相對會變快。但是也會因為無機鏈過長，使得無機鏈的連結過於單薄，容易斷裂，一旦斷裂，要再次建立，又是一段痛苦的學習過程，如圖 4。

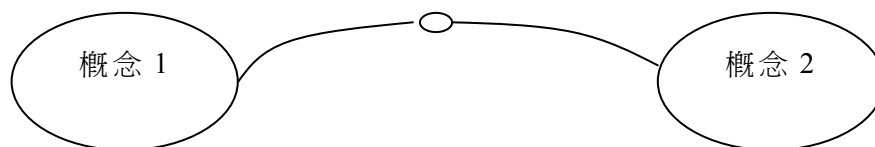


圖 4 過長的無機鏈

但是如果兩個小概念之間所聯結的「無機鏈」較短，此時學習者在聯結兩個小概念時並不會感覺到的困惑，如此一來，這樣就是適當的聯結。兩個概念之間如果都是由適當聯結的小概念所串聯，筆者就說這是由「足夠」的小概念聯結而成，這些的「足夠」的小概念就會形成「有機鏈」，由於「有機鏈」本身是由相當多個「小概念」與很多適當長度的「無機鏈」所組成，因此容易再與其他概念再形成另一有機鏈，連結到其他概念，使其適應性就相當高。這樣的聯結即使其中兩個小概念的無機鏈斷裂，也可以藉由其他的途徑作聯結，因此不容易斷了概念間的聯絡，如圖 5。

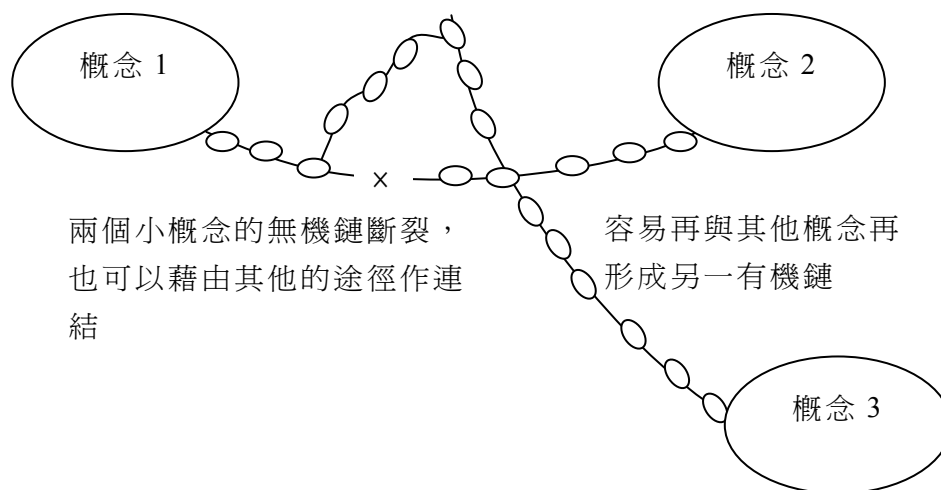


圖 5 與其他概念再形成有機鏈

三、完全有機鏈與跳島式無機鏈

理想的狀況下兩個概念之間是以「無限多個」小概念連結而成，這無限多個小概念所形成的聯結筆者稱作「完全有機鏈」，也就會形成「完全理解」。但是「完全有機鏈」的連結是沒有效率的，因為必須經過太多的概念，而且學習者不一定會具備中間所有的小概念，所以我們在學習的過程中，往往會忽略一些概念進而追求效率，或是跳過對於「部份理解」沒有影響的小概念，進而在一定距離的小概念間建立「跳島式無機鏈」，如圖 6。「跳島式無機鏈」的建立，就能夠使得學習者在學習的過程中忽略一些小概念，甚至忽略未被建立的小概念，使得整個「完全有機鏈」被修正成一般的「有機鏈」，如此一來，不僅可以兼顧效率，在中間有小概念未被建立時，依然可以繼續進行學習，達成「部份理解」。

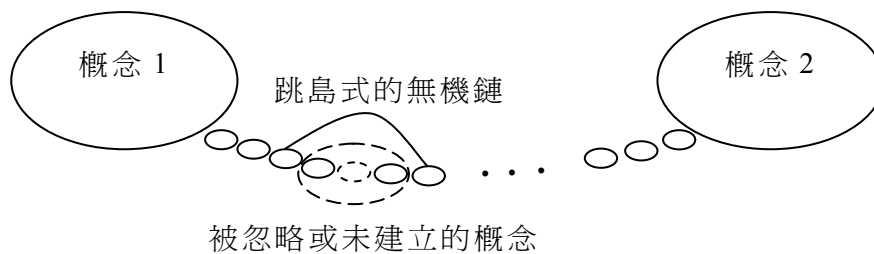


圖 6 跳島式無機鏈

當「跳島式無機鏈」被建立之後，如果該「跳島式無機鏈」常常被使用，則會使聯結增強，有可能造成被跳過的小概念因為較少使用，進而失去聯結，甚至退化消失，如圖 7。這也說明了有許多的數學公式，即使是自己從頭到尾所推導出來，但是當該公式的結果使用較久且熟練時，忽略了原本的推導過程，若要重新推導則需要再花一點時間才能夠再度想起，主要是原因為原本擁有的小概念已經退化。

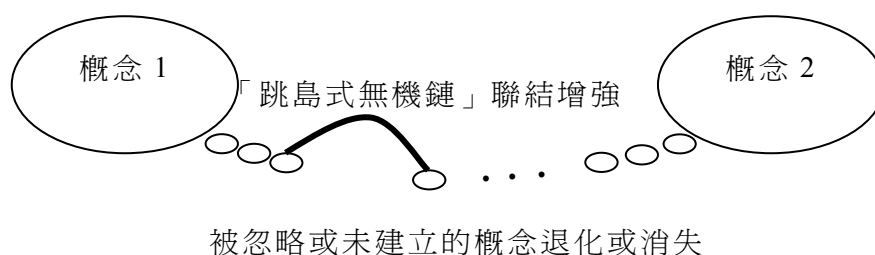


圖 7 「跳島式無機鏈」聯結增強

也有可能雖然建立了「跳島式無機鏈」，但是因為太少使用，使得「跳島式無機鏈」斷裂，不過會因為原本「完全有機鏈」的存在，不至於失去兩個概念之間的連結，如圖 8。這也說明了在學習數學的過程當中，有些公式如果不够熟練，縱然使得「跳島式無機鏈」斷裂，但是我們還是可以藉由「完全有機鏈」的存在，使我們依然能夠重新推導該公式。

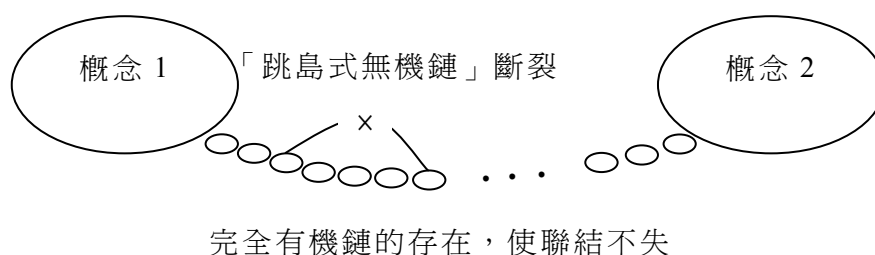


圖 8 「跳島式無機鏈」斷裂

另外，如果原本「跳島式無機鏈」的形成，就是因為中間有小概念未被建立或失去，也有可能在之後的學習之中，把原本未被建立的小概念或是失去的小概念重新建立，使得有機鏈更加完整，如圖 9。這也說明了我們在學習數學的過程當中，也許在當下並不能夠充份理解的概念，會因為之後的學習，使得原本的概念更加清楚。

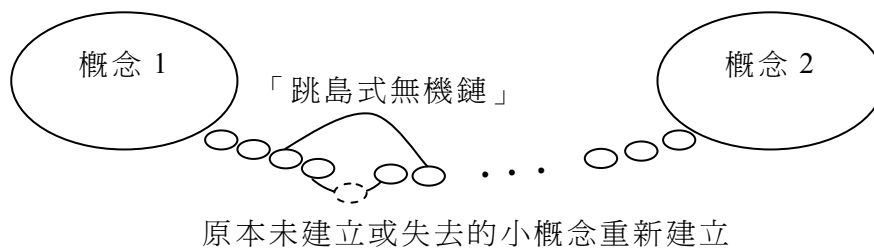


圖 9 小概念的重新建立

伍、結語

在此也回答了筆者自己所提出的問題，對於學習者而言，無法理解進而要死背的東西，往往是令人痛苦，也就是筆者論點所提的「無機鏈」，其聯結雖然有效率，不過容易斷裂且不易形成；但是如果追求「完全理解」，似乎也太過於理想化，在實際的學習狀況下確實有困難。

由此可知，針對一開始前言所提，也許學生在使用一元一次方程式這個工具解決應用問題時，或許無法在失去這個工具之下解決該問題，但是在握有此工具時，學生因為能夠解決該問題，而感受理解，如此一來，雖然學生無法達到「完全理解」，但是在「部份理解」的狀況下，還是能夠繼續邁開學習的步伐，進而往前學習。

因此筆者認為，如果要讓學生在學習的過程當中達到「完全理解」，常會因為學習的環境、個別的因素等不可控制的因素使其過份理想化，但是我們也不樂見學生在毫無理解的狀況之下學習，因此筆者主張「部份理解」，讓每一個教師能夠根據學生的狀況，能在學生學習的過程當中，幫助學生建立適合自己的「有機鏈」聯結，進而達到「部份理解」的學習狀態。

參考文獻

Richard R. Skemp (1995)・**數學學習心理學** (陳澤民譯) (頁 171-172, 頁 203-213)・臺北市：九章。(原著出版於 1987)