屏東教大科學教育
2012 年，35，85-103

「點色皆獨」牌陣與四階魔方陣之系統性轉化

林燈茂
國立屏東教育大學應用數學系退休老師

壹、前言

本刊第 34 期「點色皆獨」一文中，筆者在前言中曾提及：「點色皆獨」牌陣配置活動，不僅有建構「點色皆獨」牌陣之要件、體驗「外形互異但數學結構都相同」之具體意涵、輕鬆經歷「同步從多個面向（包括 4 階牌陣之各直行、橫列、對角線、四角落之 2×2 區塊與中央之 2×2 區塊）已出現的牌點（pip）和花色（suit）等線索來進行推理與監控」的數學思考之旅等設計，也有以任一個「點色皆獨」牌陣爲原型，經由牌陣之系列變換衍生出另類「點色皆獨」牌陣及轉化爲「四階魔方陣」之體驗設計，期能使得讀者充分體驗系統性數學思考之神奇威力與成功解題的樂趣，並感受到「處變不變」的數學本質之美（林燈茂，2011，頁 75）。

然限於篇幅，有關「點色皆獨」牌陣與「四階魔方陣」之間的轉化及「點色皆獨」牌陣之系列變換等兩個議題，筆者在「點色皆獨」一文中並未加以處理，故本文旨在論述「點色皆獨」牌陣與「四階魔方陣」之間的「近似同構」關係與系統化相互轉化之議題，期能使得讀者體驗到系統性數學思考之神奇威力。至於另一「點色皆獨」牌陣的系列變換之議題，則仍請容後再論述。

本文先揭示「點色皆獨」牌陣之牌點配置與「四階魔方陣」之數字配置的「近似同構」關係，以做爲發展「點色皆獨」牌陣轉化「四階魔方陣」的媒介物件—「C→N 參照表」之理論基礎。接著，將闡述筆者設計出可系統化配製 1152 種「C→N 參照表」之模具組的有關論述，並提出若干將「點色皆獨」牌陣轉化成「四階魔方陣」之做法與具體示例。然後，更進一步探討「點色皆獨」牌陣形式與模具組型別對轉化「四階魔方陣」**集 M** (含 1152 種「四階魔方陣」)之影響，以建立有關「點色皆獨」牌陣轉化成「四階魔方陣」之更具一般化的定則。最後，再以這些定則來作爲發展系統性衍生「點色皆獨」牌陣**集 P** (含 1152 種「點色皆獨」牌陣)之方法的論述基礎。

貳、「點色皆獨」牌陣與四階魔方陣之「近似同構」關係

Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz

圖一：「點色皆獨」牌陣

VS.

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

圖二：四階魔方陣（由 1~16 所組成）

※圖一牌陣中各牌之第 1 個符號 S、H、C、D 依序表示花色黑桃、紅心、梅花、方塊；而續接於花色 S、H、C、D 右下角之符號 x、y、z、w，則表示該牌之牌點，如圖一牌陣之第一列的 Sx、Hy、Cz、Dw 依序表示黑桃 x 點、紅心 y 點、梅花 z 點及方塊 w 點。而 x、y、z、w 可代表牌點 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K 等 13 種牌點中任意選定之四者。

任一「點色皆獨」牌陣（如圖一）之 4 直行、4 橫列、2 對角線、四個角落之 4 個 2×2 區塊及中央之 1 個 2×2 區塊等 15 處之 4 張牌的花色與牌點之分佈，不僅具有「點色皆獨」特質，且這 15 處之 4 張牌的牌點之和也都同爲一定數（即 x+y+z+w）；加上"4 直行、4 橫列、2 對角線、四個角落之 4 個 2×2 區塊及中央之 1 個 2×2 區塊等 15 處的 4 個數字之和皆爲同一定數"，又正是「四階魔方陣」（如圖二）之特質。如此，顯見兩者之間存在有「**近似同構**」關係，差別僅在於「四階魔方陣」中之 16 個數字均互異，而「點色皆獨」牌陣之 16 個牌點卻僅由 4 種牌點重複 4 次所組成（參閱圖一與圖二）。

鑑於上述之「**近似同構**」關係，只要能研發出一套適當的轉化法，將「點色皆獨」牌陣之 16 張牌的牌面內容，依序與數字 1~16 進行「一對一對換」，便可順利將「點色皆獨」牌陣轉化成「四階魔方陣」。

參、建構可系統化產出 1152 種「C→N 參照表 」之模具組

一、可系統化重複設計不同「C→N 參照表」的模具組之組成要件與原型

由於對於一個 4×4 的二維表格而言，若以「4 種花色 S（黑桃）、H（紅心）、C（梅花）、D（方塊）之任一種排列方式」來標示其橫（縱）軸的類別，並以「4 種牌點 x、y、z、w 之任一種排列方式」來標示其縱（橫）軸的類別，則由橫軸和縱軸之各組正交類別所形成之 16 個「二元類別坐標」，都正好可用來表徵任一「點色皆獨」牌陣之 16 張牌的牌面內容（如二元類別坐標（S，y）與（y，S）都可表徵黑桃 y 點之牌、（H，w）與（w，H）都可表徵紅心 w 點之牌）。因此，基於「點色皆獨」牌陣與「四階魔方陣」之「近似同構」關係，若能將數字 1~16 適當的配置在這個 4×4 的二維表格之 16 個方格中，並以表徵「點色皆獨」牌陣各牌之二元類別坐標在 4×4 的二維表格中所對應之數字，做爲覆蓋取代牌陣中各牌之依據（如（S，y）與（H，w）在 4×4 的二維表格中所對應之數字依序爲 1 和 14 時，則牌陣之 Sx 與 Hw 牌將依序被數字卡 1 和 14 覆蓋取代），便可獲致一個可將「點色皆獨」牌陣轉化成一個「四階魔方陣」的「C→N 參照表」（※C→N 表示將牌面內容轉化成數字）。

幾經試探，筆者以爲配置數字 1~16 於二維表格之 4×4 方格時，只要能使「每一直行之 4 個數字對於模數（modul）4 均具同餘（congruences）關係」或「每一橫列之 4 個數字對於模數（modul）4 均具同餘關係」，便可獲致一組可系統化重複設計不同「C→N 參照表」的模具組，如下列之模具組 A(含 A_1 與 A_2 一對模具)與模具組 B(含 B_1 與 B_2 一對模具)。

1.模具組 A

模具 A—1

牌點

	13	14	15	16
	9	10	11	12
	5	6	7	8
	1	2	3	4

花色

&

模具 A—2

花色

	13	14	15	16
	9	10	11	12
	5	6	7	8
	1	2	3	4

牌點

2.模具組 B

模具 B—1

牌點

	1	5	9	13
	2	6	10	14
	3	7	11	15
	4	8	12	16

花色

&

模具 B—2

花色

	1	5	9	13
	2	6	10	14
	3	7	11	15
	4	8	12	16

牌點

※在同一模具組之兩模具中，數字 1~16 在 4×4 方格中之配置方式都相同，但兩者將花色與牌點做爲縱（橫）軸之作法正好相反。

二、1152 種數字表配置方式不同的模具組

由於上列模具組 A 與模具組 B 中的數字表，經以「整列或整行平移」的調位方式任意進行**列序**或**行序**變換之後，其數字表中的數字 1~16 之配置方式，仍然會保有「每一直行之 4 個數字對於模數（modul）4 均具同餘（congruences）關係」，或「每一橫列之 4 個數字對於模數（modul）4 均具同餘關係」，符合模具組之建構要件。因此，當模具組 A 與模具組 B 之縱軸與橫軸均固定不變，只以「整列或整行平移」的調位方式任意變換其數字表之列序或行序，則其變換結果仍屬一組可系統化重複設計不同「C→N 參照表」之模具組，如下列之模具組 A_1 與 B_1 分別表示由模具組 A 與 B 變換所生之第 1 個模具組。又因模具組 A 與 B 之數字表的 4 橫列之**列序**排列方式各有 4!=24 種，且 4 直行之**行序**排列方式也各有 24 種，故模具組 A 與 B 中的數字表之如

上述的變換方式都各有 24×24=576 種（其中之一是模具組 A 與模具組 B 原來的數字表樣式），意即以模具組 A 與 B 為原型可分別變換出 575 種另類的模具組，所以總共可以建構出 576×2=1152 種可系統化重複設計不同「C→N 參照表」之模具組（包括 A 與 B 兩組原型）。

3. 模具組 A_1

模具 A_1—1

牌點					
		1	4	3	2
		9	12	11	10
		5	8	7	6
		13	16	15	14
	花色				

&

模具 A_1—2

花色					
		1	4	3	2
		9	12	11	10
		5	8	7	6
		13	16	15	14
	牌點				

4. 模具組 B_1

模具 B_1—1

牌點					
		4	12	8	16
		2	10	6	14
		3	11	7	15
		1	9	5	13
	花色				

&

模具 B_1 —2

花色					
		1	4	3	2
		9	12	11	10
		5	8	7	6
		13	16	15	14
	牌點				

三、一個模具組可系統化產出 1152 種 C→N 轉化功能不同的「C→N 參照表」

由於 4 種花色（S、H、C、D）與 4 種牌點（x、y、z、w）之排列方式各有 24 種，且其每一種排列方式均可充作每一模具之縱軸或橫軸的類別標示。因此，一個模具可透過縱（橫）軸之花色與牌點的排列方式變換產出 24×24=576 種不同形式的「C→N 參照表」，每一模具組之兩個模具總共可產出 **576×2=1152** 種不同形式的「C→N 參照表」。

每一模具組之兩個模具，不僅同一模具所產出的 576 種「C→N 參照表」之轉化功能互不相同，且因同一模具組之兩個模具中的數字表之配置方式相同，而其縱（橫）軸的類別標示卻對換，導致任何分別來自該兩個坐標軸類別標示對換之模具(如模具 A1 與模具 A2) 所造出之任意一對「C→N 參照表」，其 C→N 轉化功能均不可能完全相同，即使之前已定義了「坐標分量前後對置之兩個二元類別坐標皆可表徵同一張牌」，如（C，y）與（y，C）均視爲表徵梅花 y 點之牌，兩個「C→N 參照表」 各自所顯示之 16 個二元類別坐標，至多也僅能出現 4 組相同的二元類別坐標可以分別對應到同一數字(每一種花色至多出現一組)。所以，**每一模具組之兩個模具總共可產出 576×2=1152 種不同 C→N 轉化功能之「C→N 參照表」。**

肆、「點色皆獨」牌陣轉化四階魔方陣之引理與具體示例

一、每一個「點色皆獨」牌陣透過一個模具組均可衍生出 1152 種「四階魔方陣」

每一個「點色皆獨」牌陣均可依據一個「C→N 參照表」之媒介轉化成一個「四階魔方陣」，並且隨「C→N 參照表」的不同，轉化所衍生之「四階魔方陣」的配置方式也互異，所以同一個「點色皆獨」牌陣分別透過同一個模具組所產出之 1152 種轉化功能互異的「C→N 參照表」來轉化，便可衍生出 1152 種「四階魔方陣」，而且此一引理對於每一「點色皆獨」牌陣均可適用。

二、「點色皆獨」牌陣轉化成「四階魔方陣」之做法與示例

以下使用圖一之「點色皆獨」牌陣分別透過產自模具組 A 之 4 種互異的「C→N 參照表」（其中之編碼 A－1－①和 A－1－②依序表示由模具組 A 之模具 A－1 所產出之第①、②個「C→N 參照表」，本文以下各「C→N 參照表」之編碼意涵類推）來進行牌陣之轉化，其所衍生之「四階魔方陣」依序續接於各「C→N 參照表」之後，旨在具體佐證「**同一個『點色皆獨』牌陣分別透過同一個模具組所產出之互異的『C→N 參照表』來轉化，其所衍生之「四階魔方陣」的配置方式也互異**」之引理。

以圖一經「C→N 參照表 A—1—①」轉化爲四階魔方陣 M1（即圖二）爲例，其具體做法是：依序在「C→N 參照表 A—1—①」中搜尋表徵圖一各牌之二元類別坐標所對應的數字，然後逐一以具有該數字之紙卡覆蓋取代圖一相對應之各牌，便可輕易將圖一轉化成四階魔方陣 M1（即圖二）。如表徵圖一第 1 列第 3 行之牌 Cz 的二元類別坐標爲（C，z），而二元類別坐標（C，z）在「C→N 參照表 A—1—①」中所對應之數字爲 11，則需將數字卡 11 配置在圖一第 1 列第 3 行之牌上，以取代撲克牌 Cz，其間的轉化程序：即 Cz→（C，z）→11→「以 11 取代 Cz」，其它各牌之轉化程序類推。

※以下各示例所標示的「點色皆獨」牌陣代碼 Pi，表示本文所列舉之第 i 個「點色皆獨」牌陣；而四階魔方陣代碼 Mj，則表示在「點色皆獨」牌陣轉化四階魔方陣的諸示例中所出現之第 j 種四階魔方陣，其它同類代碼之意涵類推。

示例 1：

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※取自圖一			

→

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	**w**	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

→

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10
※此四階魔方陣即圖二			

示例 2：

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※取自圖一			

→

C→N 參照表 A—1—②					
牌點	y	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	x	5	6	7	8
	w	1	2	3	4
		H	D	S	C
		花色			

→

四階魔方陣 M2			
7	13	12	2
10	4	5	15
1	11	14	8
16	6	3	9

示例 3:

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※取自圖一			

→

C→N 參照表 A—2—①					
花色	S	13	14	15	16
	D	9	10	11	12
	H	5	6	7	8
	C	1	2	3	4
		w	z	x	y
		牌點			

→

四階魔方陣 M3			
15	8	2	9
10	1	7	16
5	14	12	3
4	11	13	6

示例 4:

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※取自圖一			

→

C→N 參照表 A—2—②					
花色	H	13	14	15	16
	S	9	10	11	12
	C	5	6	7	8
	D	1	2	3	4
		z	y	w	x
		牌點			

→

四階魔方陣 M4			
12	14	5	3
1	7	16	10
15	9	2	8
6	4	11	13

伍、牌陣形式與模具組型式對轉化四階魔方陣圖集之影響

由以上論述所建構之引理：**每一個「點色皆獨」牌陣均可透過一模具組來轉化衍生出 1152 種「四階魔方陣」**，進而讓筆者聯想到三個有關「牌陣形式與模具組型式對轉化四階魔方陣圖集之影響」的問題，經逐一探討結果，其所完成之相關論述分別如后：

一、不同的「點色皆獨」牌陣分別經由同一「模具組」來轉化所生之 1152 種「四階魔方陣」所組成的集合均相同

由於一個「C→N 參照表」隱含的 16 個二元類別坐標，已媒介並命定了各紙牌（C）與各數字卡（N）之間的「一對一對應」轉化指令（以上列之示例

4 的「C→N 參照表 A—2—②」爲例，其表徵之 C→N 轉化指令如下表所列）
，此一 C→N 轉化指令對任一被轉化之「點色皆獨」牌陣均一體適用。

紙牌©	Dz	Dy	Dw	Dx	Cz	Cy	Cw	Cx	Sz	Sy	Sw	Sx	Hz	Hy	Hw	Hx
數字卡(N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

同一組具「4P×4S 結構」之 16 張紙牌可配置出 1152 種「點色皆獨」牌陣（林燈茂，2011，頁 83），若從中任取兩者，其間必存在有「某些花色與牌點都相同之牌，分處於兩牌陣之不同牌位上」或「兩牌陣之同一牌位出現花色或牌點不同之牌」的現象。因此，當這兩個「點色皆獨」牌陣分別經由同一「C→N 參照表」所命定之 C→N 轉化指令來進行轉化，其轉化而成之兩個「四階魔方陣」之間，勢必也會出現某些「同一數字分處於兩魔方陣之不同牌位上」或「兩魔方陣之某些同一牌位之數字並不相同」的現象，以致兩個「四階魔方陣」絕不可能相同。所以：**互異之「點色皆獨」牌陣分別以同一「C→N 參照表」所命定之 C→N 轉化指令來進行轉化，其轉化而成之「四階魔方陣」也互異。**

雖然不同的「點色皆獨」牌陣分別經由同一個「C→N 參照表」轉化所生之「四階魔方陣」也互異，但這並不意味" 不同的「點色皆獨」牌陣分別經利用同一模具組來轉化，其各自所生之 1152 種「四階魔方陣」的集合也互異"。事實上，**一個「點色皆獨」牌陣利用某一模具組轉化所生的 1152 個「四階魔方陣」中之任一個，皆可以任意另一「點色皆獨」牌陣利用同一模具組所設計之另一「C→N 參照表」（※此一「C→N 參照表」必須隨被轉化之「點色皆獨」牌陣之變化而改變，即在該模具組所產出之 1152 種「C→N 參照表」中只有唯一一種適用） 來轉化生出，反之亦然。**

爲了具體化上述所建構的引理，謹提供下列 4 個牌陣轉化歷程圖示例，其中示例 5 與 6 之關係，旨在表徵"**互異之「點色皆獨」牌陣分別以同一「C→N 參照表」所命定之 C→N 轉化指令來進行轉化，其轉化而成之「四階魔方陣」也互異**"；而示例 5 與 7、示例 6 與 8 等兩組，則在聯合表徵"**一個「點色皆獨」牌陣利用某一模具組轉化所生的 1152 個「四階魔方陣」中之任一個，皆可以任意另一「點色皆獨」牌陣利用同一模具組所產出之另一「C→N 參照表」來轉化生出；反之亦然。**"

※下列所用之「C→N 參照表」均源自模具組 A，而圖三之「點色皆獨」牌陣則源自筆者所編製之 1152 種「點色皆獨」牌陣圖集中隨機選出。

示例 5：

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※圖一			

→

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	**w**	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

→

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10
※此四階魔方陣即圖二			

示例 6:

點色皆獨牌陣 P2			
Dy	Hz	Sx	Cw
Sw	Cx	Dz	Hy
Cz	Sy	Hw	Dx
Hx	Dw	Cy	Sz
※圖三			

→

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	**w**	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

→

四階魔方陣 M5			
8	10	1	15
13	3	12	6
11	5	14	4
2	16	7	9

示例 7:

點色皆獨牌陣 P2			
Dy	Hz	Sx	Cw
Sw	Cx	Dz	Hy
Cz	Sy	Hw	Dx
Hx	Dw	Cy	Sz
※圖三			

→

C→N 參照表 A—2—③					
花色	**C**	13	14	15	16
	S	9	10	11	12
	H	5	6	7	8
	D	1	2	3	4
		y	**z**	**x**	**w**
		牌點			

→

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10
※此四階魔方陣即圖二			

示例 8:

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※圖一			

→

C→N 參照表 A—2—④					
花色	**D**	13	14	15	16
	H	9	10	11	12
	S	5	6	7	8
	C	1	2	3	4
		z	**y**	**w**	**x**
		牌點			

→

四階魔方陣 M5			
8	10	1	15
13	3	12	6
11	5	14	4
2	16	7	9

綜上可知：**任一「點色皆獨」牌陣利用同一模具組來進行轉化，其所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都相等，與「點色皆獨」牌陣之形式無關。**

二、同一「點色皆獨」牌陣分別利用兩組不同的模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都相等

雖然相異的模具組之數字表內容不同，但其中的數字 1~16 之配置方式均具有「每一直行之 4 個數字對於模數（modul）4 均具同餘（congruences）關係」或「每一橫列之 4 個數字對於模數（modul）4 均具同餘關係」之**同構**特質。因此，源自某一模具組之每一個「C→N 參照表」，均可在任意另一模具組中配置出一個與該「C→N 參照表」具有同一 C→N 轉化指令的「C→N 參照表」，反之亦然，即每一模具組所產出之 1152 種「C→N 參照表」的整體 C→N 轉化功能都相同，所以"**同一「點色皆獨」牌陣分別利用不同的模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都會相等，與模具組之型別無關**"。

示例 9 與 10(將同一「點色皆獨」牌陣 **P1**，分別利用源自模具組 A 與 B 所設計之 1 個「C→N 參照表」進行轉化，而生出同一「四階魔方陣」M1)，旨在賦予"**同一「點色皆獨」牌陣分別利用不同的模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都會相等，與模具組之型別無關** "**之引理一具體化意涵。**

示例 9:

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※圖一			

→

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	w	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

→

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10
※此四階魔方陣即圖二			

示例 10:

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz
※圖一			

→

C→N 參照表 B—2—①					
花色	**S**	1	5	9	13
	H	2	6	10	14
	C	3	7	11	15
	D	4	8	12	16
		x	**y**	**z**	**w**
		牌點			

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10
※此四階魔方陣即圖二			

三、不同的「點色皆獨」牌陣分別利用不同的模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都相等

令 **Pi** 與 **Pj** 分別表示任意兩個不同的「點色皆獨」牌陣、As 與 At 分別表示任意兩個不同的模具組、M 表示 **Pi** 利用模具組 As 轉化所生 1152 種「四階魔方陣」之集合、N 表示「點色皆獨」牌陣 **Pj** 利用模具組 At 轉化所生 1152 種「四階魔方陣」之集合，由"任一「點色皆獨」牌陣利用同一模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都相等，與「點色皆獨」牌陣之形式無關"之引理，可推得"**Pj** 利用模具組 As 轉化所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合也是 M，並且 **Pi** 利用模具組 At 轉化所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合也是 N"，再由"同一「點色皆獨」牌陣分別利用不同的模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合都會相等，與模具組之型別無關"之另一引理，可進一步推得" 「點色皆獨」牌陣 **Pi** 或 **Pj** 依序利用模具組 As 與 At 轉化所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合 M 與 N 應該相等

，亦即 **Pi** 利用模具組 As 轉化所生 1152 種「四階魔方陣」之集合 M 與 Pj 利用模具組 At 轉化所生 1152 種「四階魔方陣」之集合 N 必相等 "。**由此可建構出一有關"牌陣之形式與模具組型別對轉化四階魔方陣圖集之影響"的定則，即"不同的「點色皆獨」牌陣分別利用不同的模具組來進行轉化，其各自所生的 1152 種「四階魔方陣」之集合恆相等 "，也就是說 " 任一「點色皆獨」牌陣利用任一模具組進行轉化，其所生之 1152 種「四階魔方陣」的集合皆相同，不受牌陣形式或模具組的型別變化而影響。**

下列圖示旨在展示"兩個不同的「點色皆獨」牌陣 **P3** 與 **P4**，分別經由源自模具組 A 與模具組 B 之一「C→N 參照表」來轉化，而出生同一「四階魔方陣」"之具體案例。

示例 11:

點色皆獨牌陣 P3 →

Hw	Dy	Cz	Sx
Cx	Sz	Hy	Dw
Sy	Cw	Dx	Hz
Dz	Hx	Sw	Cy

C→N 參照表 A—1—③ →

牌點					
	y	13	14	15	16
	x	9	10	11	12
	z	5	6	7	8
	w	1	2	3	4
		H	**C**	**S**	**D**
		花色			

四階魔方陣 M6

1	16	6	11
10	7	13	4
15	2	12	5
8	9	3	14

示例 12:

點色皆獨牌陣 P4 →

Cw	Sy	Hz	Dx
Dz	Hx	Sw	Cy
Sx	Cz	Dy	Hw
Hy	Dw	Cx	Sz

C→N 參照表 B—1—① →

牌點					
	w	1	5	9	13
	z	2	6	10	14
	x	3	7	11	15
	y	4	8	12	16
		C	**H**	**D**	**S**
		花色			

四階魔方陣 M6

1	16	6	11
10	7	13	4
15	2	12	5
8	9	3	14

綜上所述，本文有關「點色皆獨」牌陣轉化「四階魔方陣」之主要探討結果，可統整如下：

1.可系統化設計出 1152 種數字表 1~16 之配置方式不同的模具組
2.每一模具組均可系統化配製出 1152 種 C→N 轉化功能不同的「C→N 參照表」
3.一個「點色皆獨」牌陣經一個「C→N 參照表」轉化，可生出一個「四階魔方陣」。
4.一個「點色皆獨」牌陣利用任一模具組所配製出之 1152 種「C→N 參照表」進行轉化，均可生出 1152 種「四階魔方陣」。
5.不同的「點色皆獨」牌陣經同一「C→N 參照表」轉化，其所生的「四階魔方陣」也不同
6.一個「點色皆獨」牌陣利用某一模具組所配製出之 1152 種「C→N 參照表」進行轉化，其所生的 1152 個「四階魔方陣」中之任一個，皆可以任意另一「點色皆獨」牌陣利用同一模具組所設計之另一「C→N 參照表」（※此一「C→N 參照表」必須隨被轉化之「點色皆獨」牌陣之變化而改變，即在該模具組所設計之 1152 種「C→N 參照表」中只有唯一一種適用） 來轉化生出，反之亦然。
7.任一「點色皆獨」牌陣利用任一模具組進行轉化，其所生之 1152 種「四階魔方陣」的集合皆相同，不受牌陣形式或模具組的型別變化而影響。

陸、「四階魔方陣」逆轉化「點色皆獨」牌陣

既然由「點色皆獨」牌陣集 P（一組具 4p×4s 結構之 16 張撲克牌，在一個具有牌位編碼的 4 階方陣中所能配置出的「點色皆獨」牌陣形式共有 1152 種，而這 1152 種「點色皆獨」牌陣的集合就稱爲牌陣集 P）中任一「點色皆獨」牌陣，利用任一模具組進行轉化，均可生出同一「四階魔方陣」集 M（由轉化所生之 1152 種「四階魔方陣」所組成的集合就稱爲「四階魔方陣」集 M）; 反之，「四階魔方陣」集 M 中之任一「四階魔方陣」，是否也均可利用任一模具組進行**逆轉化**，而生出同一「點色皆獨」牌陣集 P 呢?

連結上述有關「點色皆獨」牌陣轉化「四階魔方陣」之主要探討結果的 6、7 兩點，可再進一步推出 **“「點色皆獨」牌陣集 P 中的 1152 種「點色皆獨」牌陣，皆可分別透過同一模具組所設計的 1152 種「C→N 參照表」之唯一**

的一種，分別轉化出同一「四階魔方陣」，且此一推論對於「四階魔方陣」集 M 中之 1152 種「四階魔方陣」而言，顯然均可適用” 。再者，基於「多（1152 種「點色皆獨」牌陣）對一（同一「四階魔方陣」）之轉化的逆轉化爲「一對多」，所以「四階魔方陣」集 M 中之任一種「四階魔方陣」，皆可利用任一模具組所設計之 1152 種「C→N 參照表」分別進行逆轉化，而生出牌陣集 P 中之 1152 種「點色皆獨」牌陣。

將「四階魔方陣」集 M 中之任一種「四階魔方陣」逆轉化爲「點色皆獨」牌陣集 P 之做法，與將「點色皆獨」牌陣集 P 之任一種「點色皆獨」轉化爲「四階魔方陣」集 M 之做法相似，惟轉化程序相反而已。以下列示例 13 右端之「四階魔方陣」M1 的逆轉化之程序爲例，因其第一列第一行之數字 1 在中介之 C→N 參照表 A—1—①中所顯示的坐標爲**(S，x)**，故數字 1 應逆轉化爲牌 Sx(即數字 1→**(S，x)** →牌 Sx→以牌 Sx 取代數字卡 1)，重複此一程序逐一逆轉化「四階魔方陣」M1 中其它各數字，便可完全將右端之「四階魔方陣」逆轉化成左端的「點色皆獨」牌陣。

以下即是以源自「四階魔方陣」集 M 之同一個「四階魔方陣」，分別經由源自模具組 A 所設計之 3 個不同的「C→N 參照表」進行逆轉化，而產出 3 個互異的「點色皆獨」牌陣之示例。

示例 13:

點色皆獨牌陣 P1			
Sx	Hy	Cz	Dw
Dz	Cw	Hx	Sy
Hw	Sz	Dy	Cx
Cy	Dx	Sw	Hz

↔

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	**w**	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

↔

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

示例 14:

點色皆獨牌陣 P5			
Hw	**Dx**	**Sz**	**Cy**
Cz	**Sy**	**Dw**	**Hx**
Dy	**Hz**	**Cx**	**Sw**
Sx	**Cw**	**Hy**	**Dz**

↔

C→N 參照表 A—1—②					
牌點	y	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	x	5	6	7	8
	w	1	2	3	4
		H	D	S	C
		花色			

↔

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

示例 15:

點色皆獨牌陣 P6			
Cz	Sy	Hw	Dx
Hx	Dw	Cy	Sz
Dy	Hz	Sx	Cw
Sw	Cx	Dz	Hy

↔

C→N 參照表 A—2—④					
花色	**D**	13	14	15	16
	H	9	10	11	12
	S	5	6	7	8
	C	1	2	3	4
		z	**y**	**w**	**x**
		牌點			

↔

四階魔方陣 M1			
1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

是否任一個由數字 1~16 配置所成的「四階魔方陣」（※在一個具有牌位編碼的 4 階方陣中配置共可配置出 7040 種），均能利用任一模具組進行逆轉化，而生出同一「點色皆獨」牌陣圖集 P 呢?由示例 16 與 17 之一個非屬「四階魔方陣」集 M 之「四階魔方陣」，分別利用模具組 A 所設計之 2 個不同的「C→N 參照表」進行逆轉化，皆產出不具「點色皆獨」特質之四階牌陣的實徵案例，可知只有屬於「四階魔方陣」集 M 之「四階魔方陣」，才能保證可逆轉化出「點色皆獨」牌陣集 P。

示例 16:

四階牌陣 a			
Dx	Sz	Sy	Dw
Hw	Cy	Cz	Hx
Cw	Hy	Hz	Cx
Sx	Dz	Dy	Sw
※不具「點色皆獨」特質			

↔

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	**w**	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

↔

四階魔方陣			
4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13
※不屬於「四階魔方陣」集 M			

示例 17:

四階牌陣 b			
Cx	Hz	Sz	Dx
Dy	Sw	Hw	Cy
Dw	Sy	Hy	Cw
Cz	Hx	Sx	Dz
※不具「點色皆獨」特質			

↔

C→N 參照表 A—2—④					
花色	**D**	13	14	15	16
	H	9	10	11	12
	S	5	6	7	8
	C	1	2	3	4
		z	**y**	**w**	**x**
		牌點			

↔

四階魔方陣			
4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13
※不屬於「四階魔方陣」集 M			

雖然上列示例 16 與 17 之左端兩個不具「點色皆獨」特質之四階牌陣 a 與 b，也可經由中間之 C→N 參照表媒介轉化爲右端之「四階魔方陣」，但這並不表示任一不具「點色皆獨」特質之四階牌陣，均可如同「點色皆獨」牌陣一般，可以經由任一 C→N 參照表轉化成「四階魔方陣」，下列之示例 18 與 19 即是最佳明證。**所以，唯有「點色皆獨」牌陣才能確保可轉化成「四階魔方陣」；反之，也唯有屬於「四階魔方陣」集 M 之「四階魔方陣」，才能保證可逆轉化成「點色皆獨」牌陣。**

示例 18:

四階牌陣 c			
Dx	Sz	Sy	Dw
Hw	Cy	Cz	Hx
Cw	Hy	Hz	Cx
Sx	Dz	Dy	Sw
※不具「點色皆獨」特質			

→

C→N 參照表 A—1—①					
牌點	**w**	13	14	15	16
	z	9	10	11	12
	y	5	6	7	8
	x	1	2	3	4
		S	**H**	**C**	**D**
		花色			

→

四階數字陣			
4	11	7	16
13	6	10	1
14	5	9	2
3	12	8	15
※不具四階魔方陣特質			

示例 19

四階牌陣 d			
Cx	Hz	Sz	Dx
Dy	Sw	Hw	Cy
Dw	Sy	Hy	Cw
Cz	Hx	Sx	Dz
※不具「點色皆獨」特質			

→

C→N 參照表 A—2—⑤					
花色	**D**	13	14	15	16
	C	9	10	11	12
	H	5	6	7	8
	S	1	2	3	4
		w	**x**	**y**	**z**
		牌點			

→

四階數字陣			
10	8	4	14
15	1	5	11
13	3	7	9
12	6	2	16
※不具四階魔方陣特質			

柒、結語

本文緣起於「點色皆獨」牌陣與「四階魔方陣」在牌點與數字配置之間的「近似同構」關係，應用本文所建構的媒介轉化定律—“ **任一「點色皆獨」牌陣利用任一模具組進行轉化，均可產出 1152 種「四階魔方陣」，而且其產出之 1152 種「四階魔方陣」所組成的集合皆相同，不受「點色皆獨」牌陣形式或模具組的型別變化而影響** ”，不僅可系統性編造出 1152 個由數字 1~16 配置而成的「四階魔方陣」，亦可經由這 1152 個被轉化所成的「四階魔方陣」之任一個，逆轉化出同一「點色皆獨」牌陣圖集 P（含 1152 種配置方式互異之「點色皆獨」牌陣）。故本文所提出之**模具組 A 或 B**，均不失爲一可系統性產出 1152 種「四階魔方陣」與 1152 種「點色皆獨」牌陣的最佳媒介轉化工具。

參考文獻

林燈茂（2011）。點色皆獨。**屏東教大科學教育**，34 期， 73~92。