

「點色皆獨」牌陣之系統性變換

林燈茂

國立屏東教育大學應用數學系退休老師

壹、前言

本刊 34 期「點色皆獨」一文中曾指出:16 張具 4P (牌點) × 4S (花色) 結構之牌堆，在 16 個方格已設定編碼①~⑯之四階方陣中，共可配置出 1152 種各直行、各橫列、各對角線、各角落之 2×2 區塊與中央之 2×2 區塊等 15 處之 4 張牌，在同一處中均具有「牌點與花色均各自獨立，絕不重複出現」之特質的「點色皆獨」牌陣 (林燈茂，2011，78-83)。

16 張具 4P×4S 結構之牌堆，在 16 個方格已設定編碼①~⑯之四階方陣中，雖可參照「點色皆獨」牌陣之配置策略與要訣及有關其配置程序 1、2 之適配牌位空間 (林燈茂，2011，76-78)，輕易完成前 7 張牌之配置作業；但接下來之配置程序 3 的 9 張牌之適配牌位，雖早已被定位毫無彈性調配空間，卻仍須視各直行、各橫列、各對角線、各角落之 2×2 區塊與中央之 2×2 區塊等 15 處之 4 個牌位中，已配置之牌的花色與牌點內容如何，逐步來進行推理與監控，始能順利完成一個「點色皆獨」牌陣 (如圖 1) 之配置任務。因此，若欲建構出該牌堆所有可能配置出來之「點色皆獨」牌陣圖集 P (含 1152 種互不全等之「點色皆獨」牌陣)，前述之配置策略與要訣，顯然仍非便捷之策。

S_x	H_y	C_z	D_w
D_z	C_w	H_x	S_y
H_w	S_z	D_y	C_x
C_y	D_x	S_w	H_z

※牌陣中各牌之第 1 個符號 S、H、C、D 依序表示花色黑桃、紅心、梅花、方塊；而續接於花色 S、H、C、D 右下角之符號 x、y、z、w，則表示該牌之牌點，如圖 1 牌陣之第一列的 S_x 、 H_y 、 C_z 、 D_w 依序表示黑桃 x 點、紅心 y 點、梅花 z 點及方塊 w 點。而 x、y、z、w 可代表牌點 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K 等 13 種牌點中任意選定之四者。

圖 1 「點色皆獨」牌陣之典型案例

爲了提昇建構含 1152 種互不全等的「點色皆獨」牌陣之牌陣圖集 P

的效能，筆者在本刊 35 期已建構「四階魔方陣圖集 **M**（含 1152 種四階魔方陣）中之任一者，皆可透過筆者所研發之 1152 種模具組的任一組（如典型模具組 **A**）之媒介，系統性地**間接**逆轉化出『點色皆獨』牌陣圖集 **P**」之論述（請參閱林燈茂，2012，98-102）。本文則是承繼前者，進一步提出可系統性**直接**衍生「點色皆獨」牌陣圖集 **P** 之兩種殊途同歸的另類方法，即 **T** 與 **S** 兩系列牌陣變換法。**T** 與 **S** 兩系列牌陣變換法的變換歷程圖之一，如圖 2 所列。

貳、簡介 **T** 與 **S** 兩系列牌陣變換歷程圖

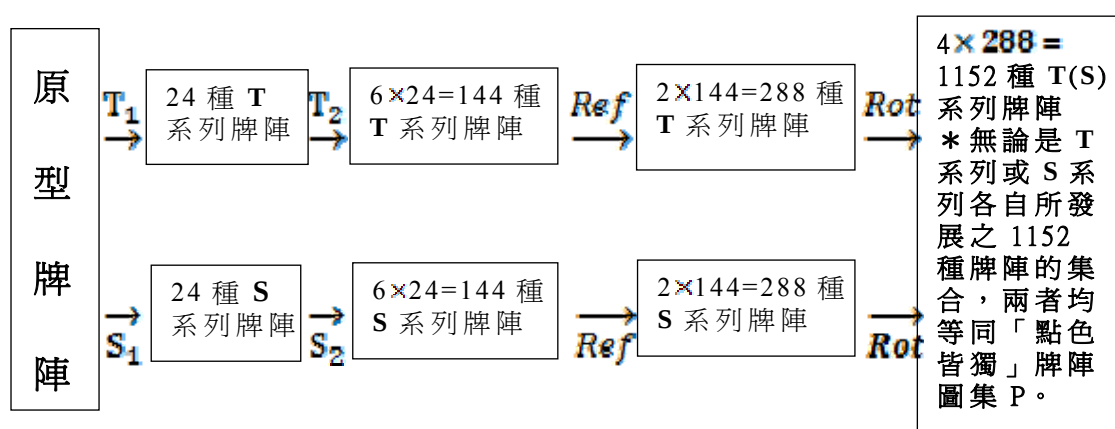


圖 2：T 與 S 兩系列牌陣變換歷程圖之一

簡介：

- 一、任一「點色皆獨」牌陣皆可作為「原型牌陣」
- 二、可從另一副牌中選取 16 張與原型牌陣相同之牌，來做為進行 T_1 (S_1) 變換建立新牌陣之牌具。
- 三、原型牌陣經 T_1 (S_1) 變換可衍生出 23 種新的「點色皆獨」牌陣，使得該系統內之「點色皆獨」牌陣數量，由 1→24（包括原型牌陣）。
- 四、24 種「點色皆獨」牌陣之每一種，再經 T_2 (S_2) 變換又可衍生出 5 種新的「點色皆獨」牌陣，使得該系統內之「點色皆獨」牌陣數

量，由 $24 \rightarrow 6 \times 24 = 144$ （包括原有之 24 種）。

- 五、T (S) 系列之 144 種「點色皆獨」牌陣之每一種，再經 Ref 變換（即鏡射）又可衍生出 1 種新的「點色皆獨」牌陣，使得該系統內之「點色皆獨」牌陣數量，由 $144 \rightarrow 2 \times 144 = 288$ （包括原有之 144 種）。
- 六、T (S) 系列之 288 種「點色皆獨」牌陣之每一種，再經 Rot 變換（即旋轉 90° 、 180° 及 270° ）又可衍生出 3 種新的「點色皆獨」牌陣，使得該系統內之「點色皆獨」牌陣數量，由 $288 \rightarrow 4 \times 288 = 1152$ （包括原有之 288 種）。
- 七、一個原型牌陣連續經 T_1 、 T_2 、Ref 等 3 種 T 系列牌陣變換，與同一「點色皆獨」牌陣（或以來自同一「 $4P \times 4S$ 結構」之 16 張牌所配置之另一「點色皆獨」牌陣）做為 S 系列之原型牌陣，經 S_1 、 S_2 、Ref 等 3 種牌陣變換之後，雖然均可發展成 288 種「點色皆獨」牌陣，但兩者之牌陣集並不一定會相等；不過，只要再經 Rot 變換（即旋轉）之後，T 與 S 兩系列最終各自發展出來之 1152 種「點色皆獨」牌陣所組成的牌陣集，將變為相等，都是「點色皆獨」牌陣圖集 P。
- 八、圖 2 所列之 T 與 S 兩系列牌陣變換歷程圖並非唯一（* 實際上可畫出 $24 \times 24 = 576$ 種不同形式之 T 與 S 兩系列牌陣變換歷程圖），任意調整各系列之 4 種牌陣變換的執行先後順序（* 各有 24 種不同的變換調整方式），最終也都能發展出含 1152 種「點色皆獨」牌陣之同一牌陣圖集 P。

T 與 S 兩系列牌陣變換法之具體程序與有關論述，分別陳列如下：

參、T 系列之各種變換

T 系列變換，包括 T_1 、 T_2 、Ref（即鏡射）及 Rot（即旋轉）等 4 種變換。

- 一、 T_1 變換：固定 4 種牌點對應變換 4 種花色

T_1 變換之程序與案例解析如下：

(一) 建立新牌陣與原型牌陣之花色對換參照表（簡稱 T_1 變換參照表）

先將原型牌陣第一列的花色依序填入如下之**模具 S** 的「基準排列」欄中，然後**系統性**的安排四種花色之異於「基準排列」的另外 23 種花色排列（S、H、C、D 共有 $4! = 24$ 種不同的花色排列方式），逐次填入「選定排列」欄中，如此便可建立出 23 種 T_1 變換參照表；而每一種 T_1 變換參照表都可據以產生一種新的「點色皆獨」牌陣，使得 T 系統內部之「點色皆獨」牌陣數量，由 $1 \rightarrow 24$ （包括原型牌陣）。

配製 T_1 變換參照表之**模具 S**：

類別	對應花色			
基準排列				
選定排列				

(二) 建立新牌陣

參照 T_1 變換參照表中兩列花色之對應情形，利用從另一副牌中選取之 16 張與原型牌陣相同之牌，**直接**在原型牌陣上面配置新牌陣，其配置要訣如下：

1. 新牌陣與原型牌陣之同一牌位的牌點都應相同
2. 可分成四個階段來配置，每一階段均需以同一花色的 4 張牌來進行配置，可參照 T_1 變換參照表之「選定排列」中所安排的花色順序（由左而右）逐色進行配置。
3. 參照 T_1 變換參照表之「選定排列」中所安排的花色順序（由左而右）逐色進行配置時，只要將具該花色的 4 張不同牌點之牌，直接配置在原型牌陣中具有其在「基準排列」所對應之花色的 4 張牌上面（切記！**1** 所示，同一牌位之上下兩張牌的牌點必須相同）。

(三) 案例解析

以下列舉 3 種選定排列並以圖 1 作為「原型牌陣」，來解析其經由 T_1 變換產出新的「點色皆獨」牌陣之配置歷程。有關之 T_1 變換參照表及原型

牌陣圖如下：

類別	對應花色				原型牌陣			
基準排列	S	H	C	D	S_x	H_y	C_z	D_w
選定排列①	S	H	D	C	D_z	C_w	H_x	S_y
選定排列②	S	D	H	C	H_w	S_z	D_y	C_x
選定排列③	H	S	D	C	C_y	D_x	S_w	H_z

※以下使用**粗體字**標示之牌，表示該階段在「原型牌陣」上面所配置的 4 張牌。

1. 基於選定排列①之 T_1 變換所生的新「點色皆獨」牌陣之配置歷程

S_x			
			S_y
	S_z		
		S_w	

→

S_x	H_y		
		H_x	S_y
H_w	S_z		
		S_w	H_z

→

S_x	H_y	D_z	
	D_w	H_x	S_y
H_w	S_z		D_x
D_y		S_w	H_z

→

S_x	H_y	D_z	C_w
C_z	D_w	H_x	S_y
H_w	S_z	C_y	D_x
D_y	C_x	S_w	H_z

2. 基於選定排列②變換所生的新「點色皆獨」牌陣之配置歷程

S_x				→	S_x	D_y			→	S_x	D_y	H_z		→	S_x	D_y	H_z	C_w
			S_y				D_x	S_y			H_w	D_x	S_y		C_z	H_w	D_x	S_y
	S_z				D_w	S_z				D_w	S_z		H_x		D_w	S_z	C_y	H_x
		S_w					S_w	D_z		H_y		S_w	D_z		H_y	C_x	S_w	D_z

3. 基於選定排列③變換所生的新「點色皆獨」牌陣之配置歷程

H_x				→	H_x	S_y			→	H_x	S_y	D_z		→	H_x	S_y	D_z	C_w
			H_y				S_x	H_y			D_w	S_x	H_y		C_z	D_w	S_x	H_y
	H_z				S_w	H_z				S_w	H_z		D_x		S_w	H_z	C_y	D_x
		H_w					H_w	S_z		D_y		H_w	S_z		D_y	C_x	H_w	S_z

二、 T_2 變換：固定 4 種花色及 1 種牌點對應變換另外 3 種牌點

T_2 變換之程序與案例解析如下：

※「待變換牌陣」一詞，在此處係指經 T_1 變換之後 T 系統內部之 24 種「

點色皆獨」牌陣（包括圖 1 之原型牌陣）的每一個。

（一）建立新牌陣與「待變換牌陣」之牌點對換參照表（簡稱 T_2 變換參照表）

先將每一個「待變換牌陣」第一列的 4 種牌點，依序填入如下之**模**
具 P 的「基準排列」欄中，接著將該「基準排列」左 1 欄的牌點填入其
下之「選定排列」的左 1 欄中，然後再系統性的安排「基準排列」之後續
三種牌點的另外 5 種排列（4 種牌點固定 1 種，含「基準排列」有 $3!=6$
種不同的排列方式），逐次填入「選定排列」欄之後續三個欄位中，如此
便可建立出 5 種「選定排列」異於「基準排列」之 T_2 變換參照表，而每一
「待變換牌陣」都可基於其各自所建立之 5 種 T_2 變換參照表，產生 5 種新
的「點色皆獨」牌陣，使得 T 系統內部之「點色皆獨」牌陣數量，由
 $24 \rightarrow 6 \times 24 = 144$ （包括做為 T_2 變換之 24 個「待變換牌陣」）。

配製 T_2 變換參照表之**模****具 P**：

類別	對應牌點			
基準排列				
選定排列				

（二）建立新牌陣

參照 T_2 變換參照表中兩列牌點之對應情形，直接在「待變換牌陣」上
面配置新牌陣，其配置要訣猶如 T_1 變換，只要將 T_1 變換要訣中有關「花色
」與「牌點」之術語予以互換，即成 T_2 變換要訣。 T_2 變換之配置要訣如下
：

1. 新牌陣與「待變換牌陣」之同一牌位的花色都應相同
2. 可分成四個階段來配置，每一階段均需以同一牌點的 4 張牌來進行配置
，可參照 T_2 變換參照表之「選定排列」中所安排的牌點順序（由左而右
），逐一進行配置。
3. 參照 T_2 變換參照表之「選定排列」中所安排的牌點順序（由左而右）逐
一進行配置時，只要將具該牌點的 4 張不同花色之牌，直接配置在「待

變換牌陣」中具有其在「基準排列」所對應之牌點的 4 張牌上面（切記！**1** 所示，同一牌位之上下兩張牌的花色必須相同）。

（三）案例解析

1. 以圖 1 之原型牌陣作為「待變換牌陣」來進行 T_2 變換，其基於下列 T_2 變換參照表變換所生之新的「點色皆獨」牌陣之配置歷程如下：

類別	對應牌點				待變換牌陣			
基準排列	x	y	z	w	S_x	H_y	C_z	D_w
選定排列	x	w	y	z	D_z	C_w	H_x	S_y
					H_w	S_z	D_y	C_x
					C_y	D_x	S_w	H_z

S_x				→	S_x	H_w			→	S_x	H_w	C_y		→	S_x	H_w	C_y	D_z
		H_x					H_x	S_w		D_y		H_x	S_w		D_y	C_z	H_x	S_w
			C_x				D_w	C_x			S_y	D_w	C_x		H_z	S_y	D_w	C_x
	D_x				C_w	D_x				C_w	D_x		H_y		C_w	D_x	S_z	H_y

2. 以 T_1 變換之案例 3（即基於選定排列③）所建立之新的「點色皆獨」牌陣作為「待變換牌陣」來進行 T_2 變換，其基於下列 T_2 變換參照表變換所生之新的「點色皆獨」牌陣之配置歷程如下：

類別	對應牌點				待變換牌陣			
基準排列	x	y	z	w	H_x	S_y	D_z	C_w
選定排列	x	z	y	w	C_z	D_w	S_x	H_y
					S_w	H_z	C_y	D_x
					D_y	C_x	H_w	S_z

H_x				→	H_x	S_z			→	H_x	S_z	D_y		→	H_x	S_z	D_y	C_w
		S_x					S_x	H_z		C_y		S_x	H_z		C_y	D_w	S_x	H_z
			D_x				C_z	D_x			H_y	C_z	D_x		S_w	H_y	C_z	D_x
	C_x				D_z	C_x				D_z		C_x	S_y		D_z	H_w	C_x	S_y

三、Ref 變換（鏡射）：左右對稱互換

※在此處「待變換牌陣」一詞，係指經 T_1 及 T_2 變換之後 T 系統內部之 144 種「點色皆獨」牌陣（包括圖 1 之原型牌陣）的任一個。

Ref 變換之程序與案例解析如下：

（一）Ref 變換之程序

將一平面鏡置與於「待變換牌陣」之右側，出現的鏡像便是「待變換牌陣」經 Ref 變換所生之新的「點色皆獨」牌陣；另一作法是直接將「待變換牌陣」之第 1、4 兩行之牌對稱互調，再對稱互調第 2、3 兩行之牌，也可產生如上述鏡像之新的「點色皆獨」牌陣。由於每一「待變換牌陣」經 Ref 變換之後，均可衍生一種新的「點色皆獨」牌陣。因此，將使得 T 系統內部之「點色皆獨」牌陣數量，由 $144 \rightarrow 2 \times 144 = 288$ （包括原有之 144「待變換牌陣」）。

（二）案例解析

以圖 1 作為「待變換牌陣」來進行 Ref 變換產出新牌陣的歷程如下：

待變換牌陣				→	第 1、4 兩行對稱互調				→	第 2、3 兩行對稱互調			
S_x	H_y	C_z	D_w		D_w	H_y	C_z	S_x		D_w	C_z	H_y	S_x
D_z	C_w	H_x	S_y		S_y	C_w	H_x	D_z		S_y	H_x	C_w	D_z
H_w	S_z	D_y	C_x		C_x	S_z	D_y	H_w		C_x	D_y	S_z	H_w
C_y	D_x	S_w	H_z		H_z	D_x	S_w	C_y		H_z	S_w	D_x	C_y

四、Rot 變換（旋轉）：以「待變換牌陣」之中心點為旋轉中心順時針旋轉牌陣 90° 、 180° 、 270°

※「待變換牌陣」一詞，在此處係指連續經 T_1 、 T_2 及 Ref 等三種變換之後 T 系統內部所存在的 288 種「點色皆獨」牌陣（包括圖 1 之原型牌陣）之任一個。

Rot 變換之程序與案例解析如下：

（一）旋轉實作

以 T 系統內部所存在的 288 種「點色皆獨」牌陣（包括圖 1 之原型牌陣）之任一個作為「待變換牌陣」，再以該「待變換牌陣」之中心點作為旋轉中心順時針旋轉牌陣 90° ，便可得一新的「點色皆獨」牌陣（暫稱 R_1 牌陣）；再將 R_1 牌陣順時針旋轉 90° ，又可得一新的「點色皆獨」牌陣（暫稱 R_2 牌陣），表示「待變換牌陣」經連續旋轉 2 次 90° （即 180° ）所形成之新的「點色皆獨」牌陣；最後再將 R_2 牌陣順時針旋轉 90° ，又可得一新的「點色皆獨」牌陣（暫稱 R_3 牌陣），表示「待變換牌陣」經連續旋轉 3 次 90° （即 270° ）所形成之新的「點色皆獨」牌陣。由於任一 R_3 牌陣再旋轉 90° 均會回歸其最初之「待變換牌陣」，故 T 系統內部原有之 288 種「點色皆獨」牌陣經 Rot 變換之後，每一種都只能再產生 3 種新的「點色皆獨」牌陣，以致 T 系統內部之「點色皆獨」牌陣數量，將由 $288 \rightarrow 4 \times 288 = 1152$ 種（包括原有之 288 種「待變換牌陣」）。

（二）旋轉 90° 產生新牌陣的便捷對策—「列次 r +行次 $c=5$ 」法

由於將牌陣旋轉 90° 並登錄其新牌陣，在實作上確有其不便之處。以「列次 r +行次 $c=5$ 」法來配置旋轉 90° 所產生的新牌陣，不失為一具體可行的便捷對策。其操作程序如下：

1. 準備一 4 階空白方陣
2. 依照待旋轉 90° 之牌陣（包括起始之「待變換牌陣」、 R_1 牌陣及 R_2 牌陣）的列次 r 與 4 階空白方陣之行次 c 的對應規則（ $r+c=5$ ，如表 1），逐一將待旋轉 90° 之牌陣第 r 列之 4 張牌，依由左而右順序取出，再配置於 4 階空白方陣所對應之第 c 行（依由上而下順序配置）的 4 個空位中，配置完成之新牌陣即是其旋轉 90° 後之結果。

表 1 以「列次 r +行次 $c=5$ 」法配置旋轉 90° 之新牌陣的參照表

牌陣類別	列次 r 與行次 c 之對應規則			
待旋轉 90° 之牌陣的列次 r	1	2	3	4
4 階空白方陣的行次 c	4	3	2	1

(三) 案例解析

1. 以圖 1 作為「待變換牌陣」，依表 1 完成牌陣旋轉 90°之變換歷程如下：

			S_x	→			D_z	S_x	→		H_w	D_z	S_x	→	C_y	H_w	D_z	S_x
			H_y				C_w	H_y			S_z	C_w	H_y		D_x	S_z	C_w	H_y
			C_z				H_x	C_z			D_y	H_x	C_z		S_w	D_y	H_x	C_z
			D_w				S_y	D_w			C_x	S_y	D_w		H_z	C_x	S_y	D_w

2. 以圖 1 作為「待變換牌陣」，其旋轉 90°、180°、270°所產出之新的「點色皆獨」牌陣 R_1 、 R_2 及 R_3 分別如下：

待變換牌陣				→	新牌陣 R_1				→	新牌陣 R_2				→	新牌陣 R_3			
S_x	H_y	C_z	D_w		C_y	H_w	D_z	S_x		H_z	S_w	D_x	C_y		D_w	S_y	C_x	H_z
D_z	C_w	H_x	S_y		D_x	S_z	C_w	H_y		C_w	D_y	S_z	H_w		C_z	H_x	D_y	S_w
H_w	S_z	D_y	C_x		S_w	D_y	H_x	C_z		S_y	H_x	C_w	D_z		H_y	C_w	S_z	D_x
C_y	D_x	S_w	H_z		H_z	C_x	S_y	D_w		D_w	C_z	H_y	S_x		S_x	D_z	H_w	C_y

肆、S 系列之各種變換

由圖 2 之 T 與 S 系列牌陣變換歷程圖，可知 S 系列變換係由 S_1 、 S_2 、Ref 及 Rot 等四種變換串聯而成，其各種變換與 T 系列之各種變換相對應之關係相當密切，不僅 S_1 變換與 T_1 變換具有對偶關係， S_2 變換與 T_2 變換之關係也是如此，而且 S 與 T 兩系列之 Ref 變換及 Rot 變換均相同。因此，只要將 T_1 變換程序之敘述中有關「色花」之詞改為「牌點」且「牌點」之詞也改為「色花」，便是 S_1 變換程序之內容；同理 S_2 變換程序之內容也可經由 T_2 變換程序之內容直接如上所述修改而成。故以下有關 S_1 與 S_2 變換之程序的敘述都僅提示原則不再詳述，請讀者自行詳參 T_1 及 T_2 變換之敘述內容，並利用「色花」與「牌點」之對偶關係修改成 S_1 及 S_2 變換之敘述內容）。

一、 S_1 變換：固定 4 種花色對應變換 4 種牌點

以圖 1 作為「原型牌陣」，並基於表列之 S_1 變換參照表（※可據以變

換出新的「點色皆獨」牌陣之 S_1 變換參照表有 23 種，此為其一）進行牌陣變換，其產出新的「點色皆獨」牌陣之配置歷程如下：

類別	對應牌點			
基準排列	x	y	z	w
選定排列	w	x	z	y

原型牌陣（圖一）			
S_x	H_y	C_z	D_w
D_z	C_w	H_x	S_y
H_w	S_z	D_y	C_x
C_y	D_x	S_w	H_z

S_w			
		H_w	
			C_w
	D_w		

→

S_w	H_x		
		H_w	S_x
		D_x	C_w
C_x	D_w		

→

S_w	H_x	C_z	
D_z		H_w	S_x
	S_z	D_x	C_w
C_x	D_w		H_z

→

S_w	H_x	C_z	D_y
D_z	C_y	H_w	S_x
H_y	S_z	D_x	C_w
C_x	D_w	S_y	H_z

二、 S_2 變換：固定 4 種牌點及 1 種花色對應變換另外 3 種花色

以圖 1 作為「待變換牌陣」，並基於表列之 S_2 變換參照表（※可據以變換出新的「點色皆獨」牌陣之 S_2 變換參照表有 5 種，此為其一）進行牌陣變換，其產出新的「點色皆獨」牌陣之配置歷程如下：

類別	對應花色			
基準排列	S	H	C	D
選定排列	S	C	D	H

原型牌陣（圖一）			
S_x	H_y	C_z	D_w
D_z	C_w	H_x	S_y
H_w	S_z	D_y	C_x
C_y	D_x	S_w	H_z

S_x			
			S_y
	S_z		
		S_w	

→

S_x	C_y		
		C_x	S_y
C_w	S_z		
		S_w	C_z

→

S_x	C_y	D_z	
	D_w	C_x	S_y
C_w	S_z		D_x
D_y		S_w	C_z

→

S_x	C_y	D_z	H_w
H_z	D_w	C_x	S_y
C_w	S_z	H_y	D_x
D_y	H_x	S_w	C_z

三、Ref 變換（鏡射）：左右對稱互換

S 系列之 Ref 變換程序與 T 系列之 Ref 變換程序完全相同，其變換程序之詳細內容及示例解析，如 T 系列之 Ref 變換所述。

四、Rot 變換（旋轉）：以「原牌陣」之中心點為旋轉中心順時針旋轉牌陣 90° 、 180° 、 270°

S 系列之 Rot 變換程序與 T 系列之 Rot 變換程序完全相同，其變換程序之詳細內容及示例解析，如 T 系列之 Rot 變換所述。

伍、T 與 S 兩系列牌陣變換法是可系統化直接建構含 1152 種「點色皆獨」牌陣的圖集 P 之兩條殊途同歸的便捷之道

在 T 與 S 兩系列牌陣變換歷程圖（圖 2）之說明 7 中，筆者曾指出：一個原型牌陣連續經 T_1 、 T_2 、Ref 等 3 種 T 系列牌陣變換，與同一「點色皆獨」牌陣（或以來自同一 $4P \times 4S$ 結構之 16 張牌所配置之另一「點色皆獨」牌陣）做為 S 系列之原型牌陣，經 S_1 、 S_2 、Ref 等 3 種 S 系列牌陣變換之後，雖然均可發展成 288 種「點色皆獨」牌陣，但兩者之牌陣集並不相等；不過只要再經 Rot 變換（即旋轉），T 與 S 兩系統最終發展出來之 1152 種「點色皆獨」牌陣所組成的牌陣集，將變為相等。為何「以任一點色皆獨牌陣做為 T 與 S 兩系列牌陣變換之共同原型牌陣」或「以來自同一 $4P \times 4S$ 結構之 16 張牌所配置之任意兩種不同的點色皆獨牌陣分別做為 T 與 S 兩系列牌陣變換之原型牌陣」，分別經 T 與 S 兩系列牌陣變換之後，兩系統內各自所展出來之 1152 種「點色皆獨」牌陣所組成的牌陣集，必然都會等於牌陣圖集 P 呢？理何在呢？

林燈茂（2011，頁 78-83）已證明：16 張具 $4P \times 4S$ 結構之牌堆，在 16 個方格已編碼之 4 階方陣中至多只可配置出 1152 種互不全等的「點色皆獨」牌陣（※稱這 1152 種「點色皆獨」牌陣圖所組成的集合為牌陣圖集 P）。因此，以牌陣圖集 P 中任一「點色皆獨」牌陣做為「原型牌陣」，其經 T 系列牌陣變換或 S 系列牌陣變換各自所發展出之 1152 種「點色皆獨」牌陣，必然也都屬於牌陣圖集 P，顯然任一「點色皆獨」牌陣，經 T 系列牌陣變換或 S 系列牌陣變換，其各自所發展出之 1152 種「點色皆獨」牌陣之集合，都是牌陣圖集 P。基於此一推論，足可宣稱：T 與 S 兩系列牌陣變換法是可系統化直接建構含 1152 種「點色皆獨」牌陣之圖集 P 的兩條殊途同歸的便捷之道。

陸、T 與 S 兩系列牌陣變換法之 4 種變換的執行順序均可任意調整

以 T 系列牌陣變換法為例，若將其 4 種變換的執行先後順序由 $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \text{Ref} \rightarrow \text{Rot}$ （即圖 2 所列），調整為 $\text{Ref} \rightarrow T_2 \rightarrow \text{Rot} \rightarrow T_1$ 或 $T_1 \rightarrow \text{Rot} \rightarrow T_2 \rightarrow \text{Ref}$ ，則任一「點色皆獨」牌陣執行這三種變換流程，其系統內之「點色皆獨」牌陣數量的擴充歷程與 T 系列 4 種變換之關係可分別圖示如下：

一、變換流程 $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \text{Ref} \rightarrow \text{Rot}$ ：

原型牌陣	$\xrightarrow{T_1}$	原 1 新 23 總 24	$\xrightarrow{T_2}$	原 24 新 $5 \times 24 = 120$ 總 $6 \times 24 = 144$	$\xrightarrow{\text{Ref}}$	原 144 新 $1 \times 144 = 144$ 總 $2 \times 144 = 288$	$\xrightarrow{\text{Rot}}$	原 288 新 $3 \times 288 = 864$ 總 <u>$4 \times 288 = 1152$</u>
------	---------------------	---------------------	---------------------	--	----------------------------	---	----------------------------	--

二、變換流程 $\text{Ref} \rightarrow T_2 \rightarrow \text{Rot} \rightarrow T_1$ ：

原型牌陣	$\xrightarrow{\text{Ref}}$	原 1 新 1 總 2	$\xrightarrow{T_2}$	原 2 新 $5 \times 2 = 10$ 總 $6 \times 2 = 12$	$\xrightarrow{\text{Rot}}$	原 12 新 $3 \times 12 = 36$ 總 $4 \times 12 = 48$	$\xrightarrow{T_1}$	原 48 新 $23 \times 48 = 1104$ 總 <u>$24 \times 48 = 1152$</u>
------	----------------------------	-------------------	---------------------	---	----------------------------	--	---------------------	--

三、變換流程 $T_1 \rightarrow \text{Rot} \rightarrow T_2 \rightarrow \text{Ref}$ ：

原型牌陣	$\xrightarrow{T_1}$	原 1 新 23 總 24	$\xrightarrow{\text{Rot}}$	原 24 新 $3 \times 24 = 72$ 總 $4 \times 24 = 96$	$\xrightarrow{T_2}$	原 96 新 $5 \times 96 = 480$ 總 $6 \times 96 = 576$	$\xrightarrow{\text{Ref}}$	原 576 新 $1 \times 576 = 576$ 總 <u>$2 \times 576 = 1152$</u>
------	---------------------	---------------------	----------------------------	--	---------------------	--	----------------------------	--

綜上可知：調整 T 系列牌陣變換法之 4 種變換之執行先後順序（共有 24 種不同的執行流程），並不影響其最終之結果；當然調整 S 系列牌陣變換法之 4 種變換之執行先後順序，也同樣不影響其最終之結果。所以「T 與 S 兩系列牌陣變換歷程圖」之呈現方式，顯然共有 $24 \times 24 = 576$ 種，圖 2 只是其一。

柒、結語

綜觀上述，可知 T 與 S 兩系列牌陣變換法之特色，貴在牌陣之系統性直接變換，且均可使用任一「點色皆獨」牌陣作為「原型牌陣」，來進行起始變換，而歷經各系列之四種變換之後，最終都可形成同一「點色皆獨」牌陣圖集 P，即使任意調整 T 與 S 各系列之四種變換的執行先後順序，也是如此。故本文所提出之「點色皆獨」牌陣的 T 和 S 兩系列牌陣變換法，對於建構「點色皆獨」牌陣圖集 P 而言，顯然不失為另一具「系統性與便捷性」之兩種殊途同歸對策。

至於本文在數學教育之應用價質為何？筆者以為只要基於本文之論述，進一步設計出具體化的探索活動學習單，提供已完成「點色皆獨」探索活動學習單（參閱林燈茂，2011，頁 85-91）之 10 歲以上學生或社會人士再來探索，達成以下三個活動目標是可預期的。

- （一）認識「點色皆獨」牌陣之 T 或 S 系列之四種變換。
- （二）體認「點色皆獨」牌陣之「處變不變」的數學本質—「點色皆獨」不變性。
- （三）理解 1152 種「點色皆獨」牌陣之系統性衍生歷程，進而體認系統性數學思考的威力與重要性。

限於篇幅，有關連結本文之論述及上列三個活動目標的探索活動學習單之設計方案，容後再撰述。

參考文獻

- 林燈茂（2011）。點色皆獨。屏東教大科學教育，34 期，73-92。
- 林燈茂（2012）。「點色皆獨」牌陣與四階魔方陣之系統性轉化。屏東教大科學教育，35 期，85-103。