

妙算矩形牌陣中的神秘牌

林燈茂

國立屏東教育大學應用數學系退休老師

壹、前言

Adler (1957) 在其所著 Magic house of numbers 一書之第七章 Card Tricks 之 Street and Avenues 一節 (第 82~83 頁) 中，曾提出一個「在 5 階方陣之 25 張紙牌中猜出一張被觀眾任意選定之神秘牌」的古老紙牌魔術。您只要參照下列所設定之「回收原方陣」與「配置新方陣」程序，先將原方陣各牌回收成一牌疊 (先收者在上後收者在下)，再將牌疊各牌由上而下依序配置成新方陣，並在牌陣變換前後，分別請選定神秘牌之觀眾提供該神秘牌位在原方陣與新方陣之列序資訊；然後您將神秘牌位在原方陣之列序資訊，視為神秘牌位在新方陣之行序資訊，再配合其列序資訊，便可輕易地在新方陣之該列序與行序的交會處取出神秘牌。此一紙牌魔術所設定的「回收原方陣各牌之牌位先後順序」與「配置新方陣各牌之牌位順序」，筆者將其具體的表徵如下：

回收原方陣各牌之牌位先後順序					→	配置新方陣各牌之牌位先後順序				
1	2	3	4	5		1	6	11	16	21
6	7	8	9	10		2	7	12	17	22
11	12	13	14	15		3	8	13	18	23
16	17	18	19	20		4	9	14	19	24
21	22	23	24	25		5	10	15	20	25

Adler (1957，第 83 頁) 指出「此一古老紙牌魔術雖然簡易，但仍令許多人感到不可思議，惟對同一觀眾不宜重複表演太多次，否則容易被看穿您的伎倆」。顯示此一透過「牌陣變換操作」及「提示神秘牌在有關牌陣之列序資訊」，來猜測牌陣中被任意選定的一張神秘牌之活動，的確有其迷人之處，但也因其操作歷程過於簡單與制式，僅將原牌陣各列之牌依

序轉置為新牌陣各行之牌而已，以致不宜對同一觀眾重複演示太多次。「魔術數學化、數學魔術化」是筆者素來所堅持之理想，因此，以數學系統化的觀點，來活化此一「妙取 5 階方陣之神秘牌」之古老魔術，進而研發出「牌陣變換方式更具多元化與隨機變化性」且「可適用於猜測任何矩形牌陣之神秘牌」的典型魔法活動，是頗令筆者樂意去實踐之目標。

為了改善上述「妙取 5 階方陣之神秘牌」之古老魔術之不足，除了將其推廣至「妙算任何 $m \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌」外，加入「限定 $m \times n$ 階矩形牌陣，經『回收原牌陣』與『配置新牌陣』的操作（* 即牌陣變換）之後，仍須保有原來的 $m \times n$ 階型式」、「調整牌陣變換之『回收原牌陣』的作業程序」或「增加牌陣變換之操作回數」等措施，也都可使得最後所形成的 $m \times n$ 階矩形牌陣之牌面內容有更多元變化。此時，若能再進一步連結另類可相容之數學魔法設計原理，則所設計出之「妙算矩形牌陣中的神秘牌」魔法活動，必然將更具隨機變化性、神奇性與趣味性，也不用再擔心容易被觀眾看穿您的伎倆。

本文旨在分享筆者有關上述發想之研發結果，期能導引讀者鑑賞「融入基本數學原理設計的撲克牌魔法活動」之神奇性、趣味性與理解其植基的設計原理，進而應用在相關的數學教育活動或休閒表演活動中。以下先引介妙算任意 $m \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌的魔法活動及其設計原理—「矩陣轉置關係法」，再論述其它經改良後之妙算某些特定型式的矩形牌陣之神秘牌的魔法活動及其設計原理。

貳、妙算任意 $m \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌—「矩陣轉置關係法」

一、魔法活動之表演程序

（一）先請觀眾從一副撲克牌中取出若干張（1~54 張均可）、再任意排成一個牌面朝上之 $m \times n$ 階矩形牌陣 R （即每一橫列有 n 張牌且每一直行有 m 張牌之牌陣， m 與 n 之大小不拘；當 $m=n$ 時牌陣為正方形， $m \neq n$ 時牌陣為長方形）。

（二）請觀眾從 $m \times n$ 階矩形牌陣 R 之 mn 張牌中，任意默選一張做為神秘

牌，記下其位在矩形牌陣 R 中的列序 x ，也在印有「神秘牌在牌陣 R 之第（ ）行」的紙卡中填入其行序 y ，並將該紙卡正面朝下貼置於黑（白）板上；再從另一副撲克牌中取出一張與神秘牌完全相同之牌，牌面朝下貼置於黑（白）板上。然後，宣告貼置於黑（白）板上之撲克牌與紙卡，依序為神秘牌與神秘牌在牌陣 R 中之行序。

（三）請觀眾依照下列收牌規則，將矩形牌陣 R 回收成一牌面朝上之牌疊 A （先回收之牌在上，後回收之牌依序置於其下）。

1.收牌規則：依左 1 行→右 1 行之行序逐行進行，且同一行均採由上而下收牌。

2.收牌示例：如圖 1 之①。

（四）請觀眾依照下列重排規則，將牌疊 A 之 mn 張牌配置成一個牌面朝上之 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T ，並記下神秘牌在矩形牌陣 R^T 中之列序 y ，然後再將牌陣 R^T 之各牌翻面，使其牌面均朝下。

1.重排規則：從牌疊 A 中依由上而下逐張取牌，並由第 1 列起依由左而右順序置牌，每 m 張做一列，接著再依序配置第 2 列～第 n 列，直到造出一個牌面朝上之 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 。

2.重排示例：如圖 1 之②。

* 以 5×4 階矩形牌陣為例，其收牌與重排之牌位操作順序示例圖如下：

5×4 階矩形牌陣之收牌順序			
1	6	11	16
2	7	12	17
3	8	13	18
4	9	14	19
5	10	15	20

圖 1 之①

→

重排成 4×5 階矩形牌陣之置牌順序				
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

圖 1 之②

3. $m \times n$ 階矩形牌陣 R 轉置成 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 之牌面對照示例，如圖 2。

5×4 階矩形牌陣 R 之牌面				轉置 →	4×5 階矩形牌陣 R^T 之牌面				
A	B	C	D		A	E	I	M	Q
E	F	G	H		B	F	J	N	R
I	J	K	L		C	G	K	O	S
M	N	O	P		D	H	L	P	T
Q	R	S	T						

圖 2 5×4 階矩形牌陣 R 轉置成 4×5 階矩形牌陣 R^T 之牌面對照圖

* 圖中各英文字母分別代表花色或牌點互異之撲克牌的牌面，以下類同。

* 為增進本活動之神奇性，在進程序（一）～（四）期間，魔數師宜採背對觀眾來指示他們執行有關事項，以避免觀眾誤以為魔數師是因為曾看過其矩形牌陣 R 與 R^T 之牌面內容，才能正確猜中其所選定的神秘牌。

- （五）請觀眾依序宣告「神秘牌位在 $m \times n$ 階矩形牌陣 R 及 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 中的列序（即牌陣 R 之第 x 列、 R^T 之第 y 列）」
- （六）魔數師先對 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 故做施魔法狀態，然後一面大聲說出「你所選定的神秘牌在此」，一面從牌陣 R^T 中取出正交於第 y 列第 x 行之牌，並置於手上（牌面仍保持朝下）。
- （七）請觀眾將貼置於黑（白）板上之神秘牌翻面，魔數師也同步將其手上之牌翻面，公開核對兩張牌是否一模一樣。
- （八）魔數師先對其手上之神秘牌故做施魔法狀態，然後大聲說出「這張神秘牌原先是位在牌陣 R 之第 x 列與第 Y 行交會處」，並請觀眾翻開貼置於黑（白）板上之紙卡加以核對。

二、設計魔法活動之數學原理

由圖 1 之①、圖 1 之②與圖 2 之示例，可知本魔法活動將 $m \times n$ 階矩形牌陣 R 轉置成 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 之收牌與重排的作法，實際上等同將 $m \times n$ 階矩形牌陣 R 之第 1 列～第 m 列（第 1 行～第 n 行），依序轉置成 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 之第 1 行～第 m 行（第 1 列～第 n 列）。因此，原先位在

$m \times n$ 階矩形牌陣 R 之第 x 列（第 y 行）的神秘牌，經轉置之後，必然會落在 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 之第 x 行（第 y 列）中（* 此即線性代數學上常見之兩個互為轉置的矩陣之間的完美特性，筆者簡稱其為「矩陣轉置關係法」）。又觀眾在魔法活動之表演程序（六）中，已提供了該神秘牌在矩形牌陣 R 及 R^T 中所在的列序 x 與 y ，所以魔數師即使未曾看過矩形牌陣 R 及 R^T 之牌面內容，也能依據此一系列資訊，輕易從 $n \times m$ 階矩形牌陣 R^T 之第 y 列與第 x 行之正交處取出該神秘牌，也可推知該神秘牌原先是位在 $m \times n$ 階矩形牌陣 R 之第 x 列與第 y 行之正交處。以上，就是筆者設計此一**妙算任意 $m \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌**的魔法活動所植基之數學原理—「矩陣轉置關係法」。因 5 階方陣也就是 5×5 階矩陣，為 $m \times n$ 階矩陣之特例，故本魔法活動之操作程序，也適用於「妙取 5 階方陣之神秘牌」，而且上述 Adler(1957) 所引介之「妙取 5 階方陣之神秘牌」的古老魔術，其設計原理必然也是源自此一「矩陣轉置關係法」，雖然其設定之「收牌與重排」程序與筆者在上述所設定者迥異。

參、妙算 $n \times n^k$ 與 $n^k \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌—「 n 進制密碼數法」

一、妙算 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌

* 以一副撲克牌 54 張為例，共可造出 2×2 、 2×2^2 、 2×2^3 、 2×2^4 、 3×3 、 3×3^2 、 4×4 、 5×5 、 6×6 、 7×7 等 10 種 $n \times n^k$ 階矩形牌陣。

（一）魔法活動之表演程序

1. 先請觀眾從一副撲克牌中取出若干張（4、8、16、32、9、27、16、25、36、49 張均可），再任意排成一個牌面朝上之 $n \times n^k$ 階矩形牌陣 R_0 。
2. 請觀眾從 $n \times n^k$ 階矩形牌陣 R_0 之 n^{k+1} 張牌中，任意默選一張做為神秘牌，再於表 1 記下其在牌陣 R_0 中的列序 x_0 ，也印有「神秘牌位在牌陣 R_0 之第（ ）行」的紙卡中填入其行序 y_0 ，並將該紙卡正面朝下貼置於黑（白）板上；再從另一副撲克牌中取出一張與神秘牌完全相同之牌，牌面朝下也貼置於黑（白）板上。然後，宣告貼置於黑（白）板上之牌與紙卡，依序是神秘牌與神秘牌在牌陣 R_0 中之行序。

表 1 神秘牌在各 $n \times n^k$ 階矩形牌陣中之列序記錄表

牌陣	R_0	R_1	R_2		R_{k-1}	R_k
列序						

3. 請觀眾視 n^k 之 n 的次方數 k 的大小，依照下列收牌及重排規則，重複執行收牌及重排連貫作業 k 回，以使 $n \times n^k$ 階矩形牌陣 $R_0 \rightarrow n \times n^k$ 階矩形牌陣 $R_1 \rightarrow n \times n^k$ 階矩形牌陣 $R_2 \rightarrow \dots \rightarrow n \times n^k$ 階矩形牌陣 R_k 。同時，每次在進行下一個回合的收牌及重排作業之前，應即時逐一在表 1 中記下該神秘牌位在 R_1 、 R_2 、 R_3 、... R_k 等 $n \times n^k$ 階矩形牌陣中之列序 x_1 、 x_2 、 x_3 、... x_k 。

- (1) 收牌規則：將矩形牌陣依左 1 行 $\rightarrow$ 右 1 行之行序逐行進行收牌，同一行之 n 張牌均採由上而下收牌。回收之牌仍保持牌面朝上，並依回收之先後順序，由上而下堆積成牌疊 A 。
- (2) 重排規則：從牌疊 A 中依由上而下逐張取牌，並由第一列起依由左而右順序置牌，每 n^k 張造一列，接著再依序配置第 2 列 $\sim$ 第 n 列，直到造出一個牌面朝上之 $n \times n^k$ 階矩形牌陣。
- (3) 以 3×3^2 矩形牌陣為例，其每一回合之收牌與重排之操作順序示例圖如下：

每一回合之收牌操作順序								
1	4	7	10	13	16	19	22	25
2	5	8	11	14	17	20	23	26
3	6	9	12	15	18	21	24	27

圖 3 之 ①

每一回合之重排操作順序								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27

圖 3 之 ②

(4) 3×3^2 階矩形牌陣 $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ 之案例。

* 以下各牌陣中之每一英文字母均分別代表某一張撲克牌之牌面內容。

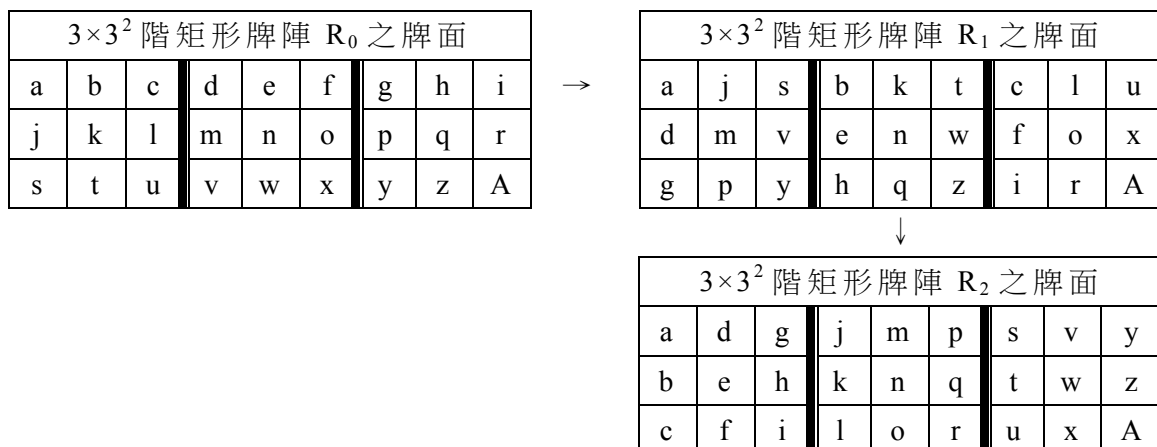


圖 4 3×3^2 階矩形牌陣 $R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$ 之牌面示例圖

(5) 若分別以 c、m、y 做為神秘牌，則由圖 4 可知其在 3×3^2 階矩形牌陣 R_0 、 R_1 、 R_2 之列序，如表 2 所列。

表 2 c、m、y 等神秘牌在 3×3^2 階矩形牌陣 R_0 、 R_1 、 R_2 中之列序一覽表

3×3^2 階矩形牌陣	R_0	R_1	R_2
神秘牌 c 所在列序	1	1	3
神秘牌 m 所在列序	2	2	1
神秘牌 y 所在列序	3	3	1

* 為增進本活動之神奇性，在進程序 1~3 期間，魔數師宜採背對觀眾方式來指示觀眾執行有關事項，不可直視任何牌陣之牌面內容。

4. 請觀眾先將終結牌陣 R_k 中各牌翻面，使其牌面全部朝下，然後再提出「神秘牌在 R_0 與 R_1 、 R_2 、 $\dots$ R_k 等 $n \times n^k$ 階矩形牌陣中的列序記錄表。
5. 魔數師先對終結牌陣 R_k 故做施魔法狀態（* 此時魔數師應利用觀眾在程序 4 所提供的列序記錄表中的 $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ 資訊，參照下列妙算要訣，心算出該神秘牌之密碼數 M ，並確認其在終結牌陣 R_k 的位置），然後再一面大聲說出「你所選定的神秘牌在此」，一面從牌

陣 R_k 中取出該牌並置於手上（牌面仍保持朝下）。

妙算 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌的要訣

一、妙算程序：

牌陣 $R_0 \sim R_k$ 之列序資訊 ($x_0, x_1, x_2 \dots x_k$)



心算神秘牌之密碼數 M



心算神秘牌在終結牌陣 R_k 中的行序 y_k



在終結牌陣 R_k 之第 x_k 列與第 y_k 行正交處取出神秘牌



心算神秘牌在起始牌陣 R_0 中的行序 y_0

二、參照算則

① 心算神秘牌之密碼數 M 的算則

$$M = (x_0 - 1) \times n^k + (x_1 - 1) \times n^{k-1} + (x_2 - 1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1} - 1) \times n + (x_k - 1)。$$

② 心算神秘牌在終結牌陣 R_k 中的行序 y_k 之算則

若 $(M+1) \div n = q$ 餘 r ，則神秘牌在終結牌陣 R_k 之行序 $y_k = q$ （當 $r = 0$ 時）或 $q + 1$ （當 $r \neq 0$ 時）。

③ 心算神秘牌在起始牌陣 R_0 中的行序 y_0 之算則

若 $(M+1) \div n^k = q$ 餘 r ，則神秘牌在起始牌陣 R_0 之行序 $y_0 = \omega$ ，而 $\omega = n^k$ （當 $r = 0$ 時）或（當 $r \neq 0$ 時）。

* 以表 2 所提供之 c 、 m 、 y 等神秘牌在 3×3^2 階矩形牌陣 R_0 、 R_1 、 R_2 中之列序資料為例，心算其密碼數 M 與其在終結牌陣 R_2 中之序 y_2 的歷程如下：

表 3 心算神秘牌之密碼數 M 與其位在終結牌陣 R_2 中的行序 y_2 之歷程

神秘牌	(x_0, x_1, x_2)	心算神秘牌之密碼數 M	心算在 R_2 之行序	行序 y_2
c	(1, 1, 3)	$(1-0) \times 3^2 + (1-0) \times 3 + (3-1) = (2)$	$(2+1) \div 3 = 1 \dots 0$	1
m	(2, 2, 1)	$(2-1) \times 3^2 + (2-1) \times 3 + (1-1) = (12)$	$(12+1) \div 3 = 4 \dots 1$	$4+1=5$
y	(3, 3, 1)	$(3-1) \times 3^2 + (3-1) \times 3 + (1-1) = (24)$	$(24+1) \div 3 = 8 \dots 1$	$8+1=9$

* 讀者可依查閱圖 4 之終結牌陣 R_k 中 c 、 m 、 y 等 3 張牌的行序資料，來檢核表 3 所推算之行序資料 y_2 是否屬實。

6. 請觀眾將貼置於黑（白）板上之神秘牌翻面，魔數師也同步將其手上

之牌翻面，公開核對兩張牌是否一模一樣。

- 7.魔數師一面對 6 中所展示之神秘牌故做施魔法狀態，一面參照妙算要訣之算則③，心算出神秘牌在起始牌陣 R_0 之行序 ω ，此處 ω 為 n^k （當 $r=0$ 時）或（當 $r \neq 0$ 時），並大聲說出「這張神秘牌原先是位在起始牌陣 R_0 之第 ω 行，然後請觀眾翻開黑（白）板上有關此一問題之答案的記錄卡內容—「神秘牌位在牌陣 R_0 之第（ y_0 ）行」，公開核對 ω 是否與 y_0 一致。

* 以表 2 所提供之 c 、 m 、 y 等神秘牌在 3×3^2 階矩形牌陣 R_0 、 R_1 、 R_2 中之列序資料為例，心算其位在起始牌陣 R_0 中之行序 ω 的歷程如表 4。

表 4 心算神秘牌位在起始牌陣 R_0 中的行序 ω 之歷程

神秘牌	密碼數 M	心算神秘牌在 R_0 之行序 ω 的歷程	ω	y_0
c	2	$(2+1) \div 3^2 = 0$ 餘 3	3	3
m	12	$(12+1) \div 3^2 = 1$ 餘 4	4	4
y	24	$(24+1) \div 3^2 = 2$ 餘 7	7	7

* 經查閱圖 4 之起始牌陣 R_0 中 c 、 m 、 y 等 3 張牌的行序資料 y_0 （如表 4 右 1 欄），的確與推算之行序資料 ω 都一致。

（二）設計魔法活動之數學原理

- 1.比對「收牌與重排」操作前後之 $n \times n^k$ 階矩形牌陣。

由於本魔數牌活動所設定之 $n \times n^k$ 階矩形牌陣的「收牌與重排」規則，分別如下：

收牌規則：將矩形牌陣由左而右依第 1 行→第 n 行之行序逐行進行收牌，同一行之 n 張牌均採由上而下收牌。回收之牌仍保持牌面朝上，並依回收之先後順序，由上而下堆積成牌疊 A 。

重排規則：從牌疊 A 中依由上而下逐張取牌，並由第一列起依由左而右順序置牌，每 n^k 張造一列，接著再依序配置第 2 列～第 n 列，直到造出一個牌面朝上之 $n \times n^k$ 階矩形牌陣。

因此，若令 $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn^k} \end{bmatrix}$ 為任一 $n \times n^k$ 階矩形牌陣，則其歷經一回之「收牌

與重排」操作，所形成的新 $n \times n^k$ 階牌陣必為 $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn^{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(n-1)n^{k-1}+1} & \cdots & a_{nn^k} \end{bmatrix}$ 。由於原矩形

牌陣也可視為由 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n^{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn^{k-1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1n^{k-1}+1} & \cdots & a_{12n^{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn^{k-1}+1} & \cdots & a_{n2n^{k-1}} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1(n-1)n^{k-1}+1} & \cdots & a_{1n^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n(n-1)n^{k-1}+1} & \cdots & a_{nn^k} \end{pmatrix}$ 等 n 個 $n \times n^{k-1}$ 階

部份牌陣串連而成（係以 n^{k-1} 行為單位將原牌陣由左而右等分割成 n 個區塊所成，上列部份矩陣由左而右依序為原牌陣等分割後之第 1、第 2…第 n 個區塊），分別比對原牌陣之 n 個區塊中的 n^k 張牌在新牌陣之牌位，可知：

（1）原牌陣之第 t 個區塊之 n^k 張牌必依「收牌與重排」原則配置在新牌陣之第 t 列上（此處 $t=1 \sim n$ 均適合）。

（2）原矩陣之各區塊中每一組牌位對應相同之 n 張牌（如 a_{11} 、 $a_{1n^{k-1}+1} \dots a_{1(n-1)n^{k-1}+1}$ ，因其均位在各區塊之第 1 列第 1 行上），將會依其所屬區塊之編碼順序（第 1～ n ），由上而下依序配置在新牌陣之同一行中（如 a_{11} 、 $a_{1n^{k-1}+1} \dots a_{1(n-1)n^{k-1}+1}$ 會配置成新牌陣之第 1 行）。導致此一配置規律之因，乃在於相鄰兩區塊中每一組牌位對應相同之兩張牌，經收牌形成後牌疊 A 之後，其在牌疊 A 之牌序會相差 n^k 個牌位，而接下來的重排又採由上而下逐列配置，且每一列均需配置 n^k 張，所以當第 t 個區塊（此處 $t=1 \sim n-1$ 均適合）其中之某一張牌 P 已被配置在新牌陣之第 i 列第 j 行，則第 $(t+1)$ 個區塊中與牌 P 牌位對應相同之牌 Q ，勢必會被配置在新牌陣之第 $(i+1)$ 列第 j 行。

（3）在原牌陣之第 1 個區塊 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n^{k-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn^{k-1}} \end{pmatrix}$ 的第 i 列（此處 $i=1 \sim n$ 均適用）

之 a_{i1} 、 $a_{i2} \dots a_{in^{k-1}}$ 等 n^{k-1} 張牌，因牌陣之每 1 行均有 n 張牌，故其任意相鄰兩張牌，經「收牌」程序形成後牌疊 A 之後，其在牌疊 A 之牌序會相差 n 個牌位，所以 a_{i1} 、 $a_{i2} \dots a_{in^{k-1}}$ 等 n^{k-1} 張牌再經「重排」程序，其任意相鄰兩張牌，也必然會以相差 n 個牌位，由左而右依序被配置在新牌陣之第 1 列中。同理第 t 個區塊（此處 $t=2 \sim n$ 均適用）之各列牌，經「收牌」與「重排」程序，同一列之 n^{k-1} 張牌，也會以先後相差 n 個牌位陸續被配置在新牌陣之第 t 列。

(4) 由(1)~(3)可進一步推知：原牌陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn^k} \end{bmatrix}$ 之每一列的 n^k 張牌，

歷經一回「收牌與重排」操作之後，將會由左而右視其所屬區塊之編碼數（第1~n），等分割成第1~n組（每一組都有 n^{k-1} 張牌）。其第t組之 n^{k-1} 張牌，都會分別以先後相差n個牌位陸續等距地被分散配置在新牌陣之第t列中（此處 $t=1\sim n$ 均適用），而且各組居於對等牌位之牌（如第i列之 a_{ij} 、 $a_{ij+n^{k-1}}$ 、 $a_{ij+2n^{k-1}}\cdots a_{ij+(n-1)n^{k-1}}$ 等n張牌均位居各組之第j個牌位，此處 $j=1\sim n^{k-1}$ 均適用），必然會出現在新牌陣之同一行中（該行之n張牌由上而下依序為 a_{ij} 、 $a_{ij+n^{k-1}}$ 、 $a_{ij+2n^{k-1}}\cdots a_{ij+(n-1)n^{k-1}}$ ）。

有了上述比對「收牌與重排」操作前後之 $n\times n^k$ 階矩形牌陣所獲知之①~④等四點發現，便可據以解析下列兩個有關本魔法活動設計原理之問題（*讀者很可能想要知道其緣由）。

2. 解析魔法活動之設計原理

(1) 為何「妙算 $n\times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌」的魔法活動，需要有請觀眾「重複操作『收牌與重排』連貫作業k回」與「依序提供神秘牌在 R_0 、 R_1 、 R_2 、 $\cdots$ 、 R_k 等 $n\times n^k$ 階矩形牌陣中的列序記錄資料（ x_0 、 x_1 、 x_2 、 x_3 、 $\cdots$ 、 x_k ）」之設計呢？

A：因觀眾所選定的神秘牌，是源自一個具有n列（每一列 n^k 張）與 n^k 行（每一行n張）之 $n\times n^k$ 階矩形牌陣 R_0 （總共有 n^{k+1} 張牌）中之任一張。若提供神秘牌在矩陣 R_0 中之列序資料 x_0 ，可候選為神秘牌者，將從整個牌陣之 n^{k+1} 張牌，縮減為其第 x_0 列之 n^k 張。依本活動中所設定之「收牌與重排」原則，操作牌陣 R_0 一回，使其變換為牌陣 R_1 ，則原來位在牌陣 R_0 之第 x_0 列的 n^k 張神秘牌候選者，會被等分割成n組（每一組都有 n^{k-1} 張牌），且其第t組之 n^{k-1} 張牌，必然會以先後相差n個牌位陸續等距地被分散配置在新牌陣 R_1 之第t列中（ $t=1\sim n$ 都適用）；此時，若再提供神秘牌在牌陣 R_1 之列序資料 x_1 ，則可候選為神秘牌者，又會從 n^k 張，縮減為牌陣 R_1 之第 x_1 列的 n^{k-1} 張牌（係來自矩陣 R_0 之第 x_0 列中的第 x_1 組）。同理，再操作矩陣 R_1 一回，使其變換為新牌陣 R_2 ，則原來以相差n個牌位等距被分散配置牌陣 R_1 之第 x_1 列中的 n^{k-1} 張神秘牌候選者，也會再被等分割成n組（每一組有 n^{k-2} 張牌），

且其第 t 組 ($t=1\sim n$ 均適用) 之 n^{k-2} 張神秘牌候選者，必然會以先後相差 n^2 個牌位的方式，等距被分散配置在牌陣 R_2 的第 t 列之 n^k 個牌位中 (* 因在 R_1 之第 x_1 列的第 t 組中，這 n^{k-2} 張神秘牌候選者，原本就是以相差 n 個牌位等距分散配置在該組之 n^{k-1} 個牌位中，而當矩陣 $R_1\rightarrow R_2$ 時其第 x_1 列的第 t 組各牌，又會以先後相差 n 個牌位陸續等距被分散配置在新牌陣 R_2 之第 t 列中，故這 n^{k-2} 張神秘牌候選者，當然是以先後相差 n^2 個牌位等距被分散配置在牌陣 R_2 之第 t 列之 n^k 個牌位中)。此時，若再提供神秘牌在牌陣 R_2 之列序資料 x_2 ，則可候選為神秘牌者，又會從 n^{k-1} 張縮減為牌陣 R_2 之第 x_2 列中的 n^{k-2} 張。同理，如果再重複操作上述矩陣變換作業 ($k-3$) 回，使牌陣 $R_2\rightarrow R_3\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow R_{k-1}$ ，並逐回提示神秘牌在牌陣 $R_3\cdots R_{k-1}$ 所在列序 $x_3\cdots x_{k-1}$ ，則可候選為神秘牌之牌數，又會以執行每一回「收牌與重排」程序，就縮減為原有之 $\frac{1}{n}$ 倍的比率，從 $n^{k-2}\rightarrow n^{k-3}\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow n$ ，且在牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列的 n

張神秘牌候選者，係以先後相差 n^{k-1} 個牌位等距被分散配置在牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列的 n^k 個牌位中 (即在牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列的 n 組牌中，每一組之 n^{k-1} 個牌位中都恰含有一張神秘牌候選者，且每一張神秘牌候選者在各組之相對牌序都位居對等牌位)。此時若再將牌陣 R_{k-1} 執行一回「收牌與重排」程序，則牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列第 $1\sim n$ 組的各一張神秘牌候選者，必然會依序被等距分散配置在牌陣 R_k 之第 $1\sim n$ 列之同一行中。故除非再提供神秘牌在牌陣 R_k 之列序資訊 x_k ，我們才可經由逐步比對牌陣 $R_0\rightarrow R_1\rightarrow\cdots\cdots\rightarrow R_{k-1}\rightarrow R_k$ 之牌面內容，取出觀眾最初在牌陣 R_0 之 n^{k+1} 個牌位中所選定的一張神秘牌。

為了幫助讀者更具體的理解上述解析 (1) 所述內容，謹以提示神秘牌在 3×3^3 矩陣 $R_0\sim R_3$ 之所在列序資訊 $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 1, 2)$ 為例，展示牌陣 $R_0\sim R_3$ 中之神秘牌候選者 (即粗體字標示者) 之配置情形及其縮減變化流程圖如下：

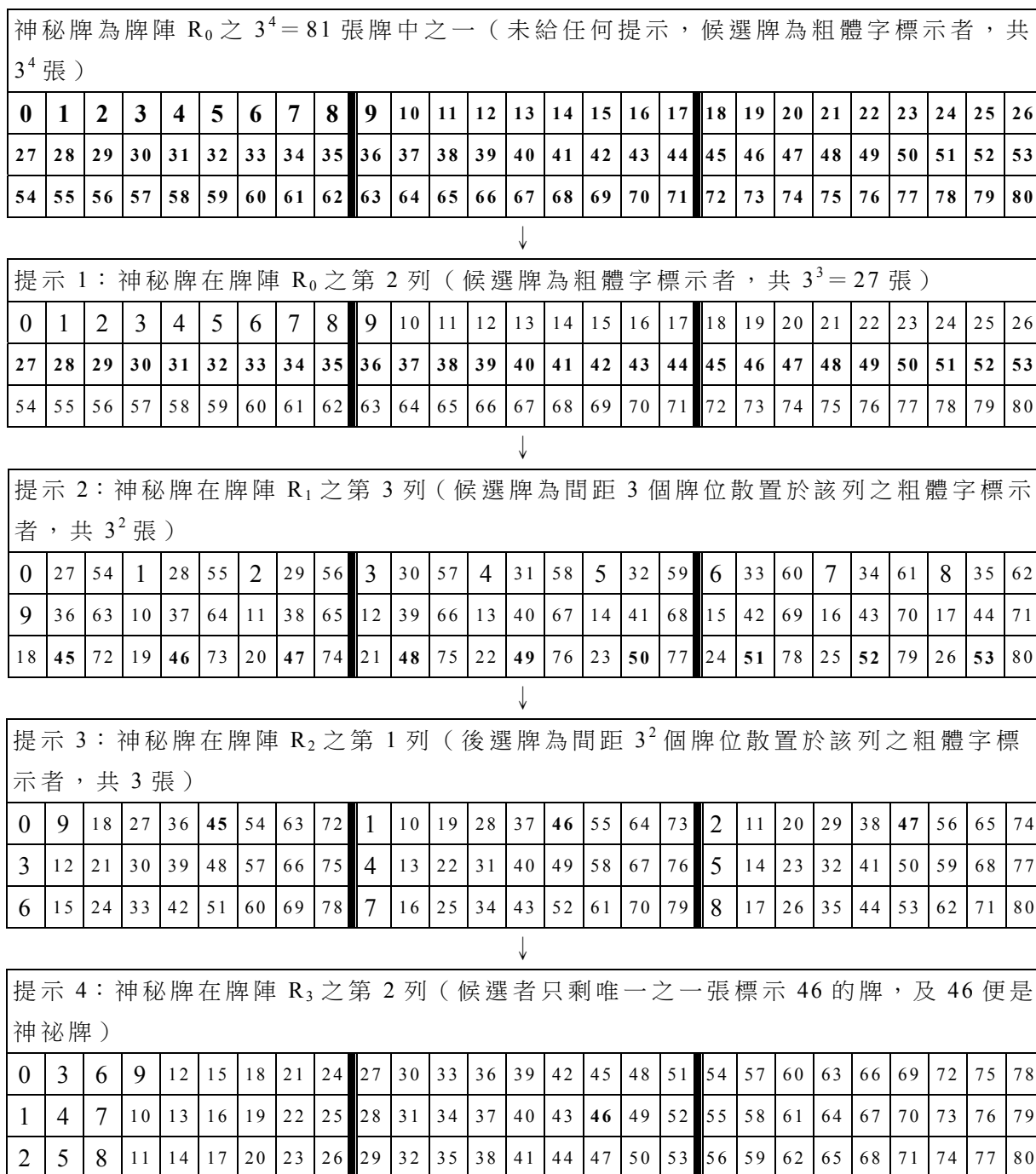


圖 5 3×3^3 階矩陣 $R_0 \sim R_3$ 中之神秘牌候選者之配置情形及其縮減變化流圖

(2) 魔數師在沒有 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_k$ 等 $(k+1)$ 個 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之牌面內容資訊的情況下，也能在牌面朝下之唯一矩陣 R_k 中，正確取出觀眾最初在牌陣 R_0 中任意選定的神秘牌，且正確說出其位在起始牌陣 R_0 之行序。魔術師所使用的妙算要訣是如何建構出來的？

A：筆者之建構歷程如下：

① 首先對起始牌陣 R_0 之 n^{k+1} 張牌，由第 1 列起由左而右依序配置一個 $0 \sim (n^{k+1} - 1)$ 之密碼數，其各牌所配置之密碼數心靈影像圖，如圖 6 所示。

0	1	2	...	$n^k - 2$	$n^k - 1$
n^k	n^{k+1}	n^{k+2}	...	$2n^k - 2$	$2n^k - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)n^k$	$(n-1)n^{k+1}$	$(n-1)n^{k+2}$	...	$n^{k+1} - 2$	$n^{k+1} - 1$

圖 6 起始牌陣 R_0 之各牌的密碼數配置心靈影像圖（簡稱矩陣 MR_0 ）

② 因起始牌陣 R_0 之第 1 列～第 (x_0-1) 列之 $(x_0-1) \times n^k$ 張牌的密碼數，係從 $0 \sim (x_0-1) \times n^k - 1$ 所以其第 x_0 列之 n^k 張牌的密碼數，顯然都可表示成 $(x_0-1) \times n^k + r_0$ ，此處 $r_0 = 0 \sim (n^k - 1)$ 。

③ 由於牌陣 $R_0 \rightarrow R_1$ 時，其第 x_0 列之 n^k 張可候選為神秘牌者，將會被等分割成 n 組（每組 n^{k-1} 張）平分到牌陣 R_1 之各列中，且每一組 n^{k-1} 張牌都是以「先後相差 n 個牌位」的方式，等距的分散在新牌陣 R_1 之同一列中。又若 $r_0 \div n^{k-1} = q_1$ 餘 r_1 ，則表示具有 $(x_0-1) \times n^k + q_1 \times n^{k-1} + r_1$ 之密碼數的神秘牌候選者，將會落在牌陣 R_1 之第 q_1+1 列中（* 因 $r_0 = 0 \sim (n^k - 1)$ 為第 x_0 列之第 1 組牌，會落在牌陣 R_1 之第 1 列）。因此，若已知神秘牌位在牌陣 R_0 之第 x_0 列與牌陣 R_1 之第 x_1 列中，則 $(x_1-1) = q_1$ ， $(x_0-1) \times n^k + q_1 \times n^{k-1} + r_1 = (x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + r_1$ ，所以合乎已知條件之 n^{k-1} 張神秘牌候選者的密碼數，均可表示成 $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + r_1$ ，此處 $r_1 = 0 \sim (n^{k-1} - 1)$ 。

④ 由於牌陣 $R_1 \rightarrow R_2$ 時，其第 x_1 列之 n^{k-1} 張可候選為神秘牌者，又會被等分割成 n 組（每組 n^{k-2} 張）平分到牌陣 R_2 之各列中，且每一組之 n^{k-2} 張牌都是以「先後相差 n^2 個牌位」的方式，等距的分散在新牌陣 R_2 之同一列中。又若 $r_1 \div n^{k-2} = q_2$ 餘 r_2 ，則表示具有 $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + q_2 \times n^{k-2} + r_2$ 之密碼數的神秘牌候選者，將會落在牌陣 R_2 之第 q_2+1 列中。因

此，若已知神秘牌位在牌陣 R_0 之第 x_0 列與牌陣 R_1 之第 x_1 列及牌陣 R_2 之第 x_2 列中，則 $(x_2-1)=q_2$ ， $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + q_2 \times n^{k-2} + r_2 = (x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + (x_2-1) \times n^{k-2} + r_2$ ，所以合乎已知條件之 n^{k-2} 張神秘牌候選者的密碼數，均可表示成 $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + q_2 \times n^{k-2} + r_2$ ，此處 $r_2=0 \sim (n^{k-2}-1)$ 。

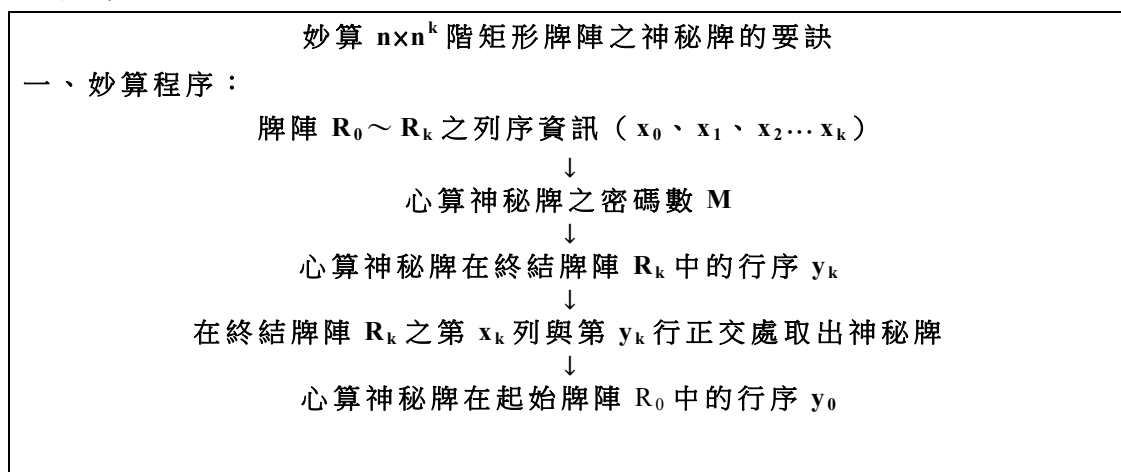
- ⑤同理，當牌陣由 $R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow \dots \rightarrow R_{k-1}$ 時，逐步持續上述推理方法，可推知在牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列之 n^k 張牌中，能符合「在牌陣 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{k-1}$ 之列序，依序為 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ 」之條件者，必定只剩密碼數可表成「 $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + (x_2-1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1}-1) \times n + r_{k-1}$ ，此處 $r_{k-1}=0 \sim n-1$ 」之 n 張牌，而且這 n 張牌必然會以「先後相差 n^{k-1} 個牌位」的方式，等距的分散在牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列之 n^k 個牌位中。
- ⑥由於在牌陣 R_{k-1} 之第 x_{k-1} 列中，密碼數可表徵如⑤所述之 n 張神秘牌候選者，係以「先後相差 n^{k-1} 個牌位」的方式，等距分散在該列中。因此，當牌陣 R_{k-1} 再變換成 R_k 時，這 n 張密碼數可表徵成「 $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + (x_2-1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1}-1) \times n + r_{k-1}$ ，此處 $r_{k-1}=0 \sim n-1$ 」之神秘牌候選者，勢必以每一列 1 張，依序落在牌陣 R_k 之同一行（稱第 y_k 行）中，即 $r_{k-1}=0$ 者落在牌陣 R_k 之第 1 列、 $r_{k-1}=1$ 者落在第 2 列 $\dots \dots r_{k-1}=n-1$ 者落在第 n 列。因此，若已知神秘牌也落在牌陣 R_k 之第 X_k 列，則 $x_k-1=r_{k-1}$ ，並且能符合「在牌陣 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{k-1}, R_k$ 之列序，依序為 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$ 」之條件者，必定只剩密碼數可唯一表成「 $(x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + (x_2-1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1}-1) \times n + (x_k-1)$ 」之一張牌，這張牌就是觀眾在起始牌陣 R_0 中所選定之神秘牌。所以，若令神秘牌之密碼數為 M ，則 $M = (x_0-1) \times n^k + (x_1-1) \times n^{k-1} + (x_2-1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1}-1) \times n + (x_k-1)$ 。
- ⑦又起始牌陣 R_0 中密碼數為 $0 \sim (n^{k+1}-1)$ 之各牌（參閱圖 6），經按本魔法活動所設定之「收牌與重排」連貫作業規則，連續操作 k 回之後，勢必會以「由第 1 行起，由上而下排滿 1 行，再重複同一排法，依序排滿第 2 行 $\sim$ 第 n^k 行」之規律，依序被配置在終結牌陣 R_k 之各行中（參閱圖 7）。既然密碼數為 $0 \sim (n-1), n \sim (2n-1) \dots \dots (n^{k+1}-n) \sim (n^{k+1}-1)$ 等 n^k 組牌（每一組 n 張），在牌陣 R_k 中依序被配置在第 1 行、第 2 行 $\dots \dots$ 第 n^k 行，又密碼數為 $0 \sim X$ （此處 $X=0 \sim (n^{k+1}-1)$ 均可）之牌共有 $X+1$ 張。如此，若 $(X+1) \div n = q$ 餘 r ，則密碼數為 X 之牌必落在終結牌陣 R_k 之第 q

行（當 $r=0$ 時）或第 $(q+1)$ 行（當 $r \neq 0$ 時）。所以，具有密碼數為 M 之神秘牌，可透過「若 $(M+1) \div n = q$ 餘 r ，則神秘牌必落在終結牌陣 R_k 之第 q 行（當 $r=0$ 時）或第 $(q+1)$ 行（當 $r \neq 0$ 時）」之算則，推知神秘牌在終結牌陣 R_k 之行序。

0	n	$2n$	$\dots \dots$	$n^{k+1} - 2n$	$n^{k+1} - 1$
1	$n+1$	$2n+1$	$\dots \dots$	$n^{k+1} - 2n+1$	$n^{k+1} - n+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$2n-1$	$3n-1$	$\dots \dots$	$n^{k+1} - n - 1$	$n^{k+1} - 1$

圖 7 終結牌陣 R_k 中各牌的密碼數心靈影像圖（簡稱矩陣 MR_k ）

- ⑧基於起始牌陣 R_0 中各牌的密碼數心靈影像圖（參閱圖 6），同理（如 ⑦）也可推知密碼數為 M 之神秘牌，可透過「若 $(M+1) \div n^k = q$ 餘 r ，則神秘牌必落在起始牌陣 R_0 之第 n^k 行（當 $r=0$ 時）或第 r 行（當 $r \neq 0$ 時）」之算則，推知神秘牌在起始牌陣 R_0 之行序。
- ⑨由 ⑥～⑧之論述結果，可知在牌陣 R_k 形成之後，觀眾只要能正確提供神秘牌在牌陣 R_0 、 R_1 、 R_2 、 $\dots R_k$ 之列序資料（ x_0 、 x_1 、 $x_2 \dots x_k$ ），魔數師便可參照下列之妙算要訣，在心中妙算出神秘牌在終結牌陣 R_k 中的行序 y_k ，進而在其第 x_k 列與第 y_k 行正交處取出該神秘牌，與妙算出神秘牌在起始牌陣 R_0 中的行序 y_0 。妙算 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌的要訣，可統整如下：



二、參照算則

① 心算神秘牌之密碼數 M 的算則

$$M = (x_0 - 1) \times n^k + (x_1 - 1) \times n^{k-1} + (x_2 - 1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1} - 1) \times n + (x_k - 1)。$$

② 心算神秘牌在終結牌陣 R_k 中的行序 y_k 之算則

若 $(M+1) \div n = q$ 餘 r ，則神秘牌在終結牌陣 R_k 之行序 $y_k = q$ (當 $r=0$ 時) 或 $q+1$ (當 $r \neq 0$ 時)。

③ 心算神秘牌在起始牌陣 R_0 中的行序 y_0 之算則

若 $(M+1) \div n^k = q$ 餘 r ，則神秘牌在起始牌陣 R_0 之行序 $y_0 = \omega$ ，而 $\omega = n^k$ (當 $r = 0$ 時) 或 r (當 $r \neq 0$ 時)。

綜觀上述妙算 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌的要訣，可知在 $n \times n^k$ 階矩形牌陣中的每一張牌之密碼數，都可透過「 $(x_0 - 1) \times n^k + (x_1 - 1) \times n^{k-1} + (x_2 - 1) \times n^{k-2} + \dots + (x_{k-1} - 1) \times n + (x_k - 1)$ 」之算則心算出來，又 $x_0 \sim x_k$ 依序是該張牌位在 $R_0 \sim R_k$ 等 $(k+1)$ 個 $n \times n^k$ 階矩形牌陣中的列序，所以每一 x_i (此處 $i=0 \sim k$ 均可) 必為數字 $1 \sim n$ 之一，亦即算則中每一 $(x_i - 1)$ 必為數字 $0 \sim (n-1)$ 之一。如此，即顯示上述心算各牌之密碼數的算則之表徵方式，正是其密碼數的 n 進制典型展開式，故筆者將妙算 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌的主要原理與方法，稱為「 n 進制密碼數法」。

二、妙算 $n^k \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌

由於 $n^k \times n$ 階矩形牌陣與 $n \times n^k$ 階矩形牌陣互為轉置矩陣，基於兩者之「列 $\leftrightarrow$ 行」轉置關係，若將執行 $n \times n^k$ 階矩形牌陣變換時所持之收牌原則—「自第 1 行起，由上而下逐行收牌」，改為「自第 1 列起，由左而右逐列收牌」，且重排原則—「自第 1 列起，由左而右逐列置牌」，也改為「自第 1 行起，由上而下逐行置牌」，來做為執行 $n^k \times n$ 階矩形牌陣變換時所持之「收牌與重排」原則。則可進一步將前述「妙算 $n \times n^k$ 階矩形牌陣之神秘牌魔法活動」的演示程序及妙算要訣，依兩者之「列 $\leftrightarrow$ 行」轉置關係，輕易修訂成適用於「妙算 $n^k \times n$ 階矩形牌陣之神秘牌魔法活動」的演示程序及妙算要訣。限於篇幅及留給讀者思考空間，請讀者自行建立。

肆、妙算 $m \times n$ 或 $n \times m$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數, $m \leq n$) 階矩形牌陣之神秘牌—「牌序居中與逆轉法」

一、妙算 $m \times n$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數, $m \leq n$) 階矩形牌陣之神秘牌

(一) 魔法活動之表演程序 (含妙算要訣)

1. 請觀眾從一副撲克牌任意取出若干張, 配置一個牌面朝上之 $m \times n$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數, $m \leq n$) 階矩形牌陣 (宣稱牌陣 R_0), 並從牌陣中任意默選一張, 做為神秘牌。接著再從另一副撲克牌中取出一張與神秘牌完全相同之牌, 將這張牌以牌面朝下的方式貼置於黑 (白) 板上。然後, 宣告貼置於黑 (白) 板上之撲克牌是神秘牌。
2. 請觀眾參照下列「收牌與重排」原則, 將 $m \times n$ 階牌陣 R_0 變換為 $m \times n$ 階牌陣 R_1 。

- (1) 收牌原則：逐行由上而下收牌, 其各行被收牌的順位, 除了具有神秘牌之行必須「居中 (即第 $\frac{n+1}{2}$ 個被收牌之行)」外, 其它各行之順位安排則不拘。此外, 回收之牌仍保持牌面朝上, 並依回收之先後順序由上而下堆積成牌疊 A 。

* 以 5×7 階矩形牌陣為例, 無論神秘牌位在牌陣之第幾行, 該行被收牌的順位均應安排在第 4 順位, 其它各行之先後順序不拘 (總共有 $6! = 720$ 組收牌順位安排方式)。

- (2) 重排原則：自第 1 列起, 由上而下取牌疊 A 之牌, 依序按「由左而右」方式逐列置牌。

3. 請觀眾再依 2 之 (1) 所述之收牌原則回收牌陣 R_1 之牌, 並將所形成之牌疊翻面, 使牌面朝下, 然後以牌疊 B 稱之。
4. 請觀眾從牌疊 B 之上半部取走一堆牌 (以牌堆 N 稱之) 置於桌上, 牌數不拘 ($1 \sim \frac{mn-1}{2}$ 張均可), 然後將牌疊 B 剩下的部份牌疊交到魔數師手上。
5. 魔數師先將手上的牌疊故做施魔法狀態, 然後自上往下取牌, 一次取走一張, 依「先取出者在下後取出者在上」之置牌原則, 在桌上疊成一具有 $\frac{mn-1}{2}$ 張牌之牌面朝下的牌堆, 再將手上之餘牌插置於該牌堆的底牌之下, 並以牌堆 M 稱呼此一最終形成之新牌堆。

- 6.請觀眾先公開點數桌上之牌堆 N 的牌數並大聲說出，然後魔數師依「若牌堆 N 的牌數是 x ，則取出牌堆 M 之第 x 張牌」之妙算要訣，在牌堆 M 中取出一張牌（牌面仍然朝下）置於手上，並宣稱此為其所猜測之神秘牌。
- 7.請觀眾將程序 1 中貼置於黑（白）板上的神秘牌翻面，魔數師也同步將其手上之牌翻面，公開比對。

（二）設計魔法活動之數學原理

1.程序 2、3 之設計目的與原理解析

上述魔法活動之演示程序 2、3 之設計，旨在使觀眾在程序 1 之牌陣 R_0 中任意選定的神秘牌，經程序 2 之「收牌與重排」作業之後，都能落在新牌陣 R_1 之「居中列（即第 $\frac{m+1}{2}$ 列）」中；進而再經程序 3 之「收牌」作業之後，使神秘牌都能落在牌疊 B 之「居中位置（即由上往下數之第 $\frac{m+1}{2}$ 張）」。

為何執执行程序 2、3 之後，必能達成上述目的呢？其原理解析如下：

- （1）由於在牌陣 R_0 執行「收牌」作業時，神秘牌所在之行被收牌的順位必須「居中（即第 $\frac{n+1}{2}$ 個被收牌之行）」。
因此，該行被收牌之前已有 $\frac{n-1}{2}$ 行之 $\frac{m(n-1)}{2}$ 張牌（ R_0 之每一行有 m 張牌， $\frac{n-1}{2}$ 行共有 $\frac{m(n-1)}{2}$ 張牌）被回收，故神秘牌置於牌疊 A 中之牌位順序，必為由上往下數之第 $\frac{m(n-1)}{2}+1 \sim$ 第 $\frac{m(n+1)}{2}$ 之一。
- （2）由於將牌疊 A 重排成 $m \times n$ 階牌陣 R_1 時，係依「自第 1 列起，由上而下取牌疊 A 之牌，依序按「由左而右」方式逐列置牌」之原則進行。
既然牌陣 R_1 之每列均需配置 n 張牌且 $m \leq n$ ，又 $(\frac{m(n-1)}{2}+1) \div n = \frac{m}{2} - \frac{m-2}{2n} > \frac{m}{2} - \frac{m}{2n} \geq \frac{m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2}$ 且 $\frac{m(n+1)}{2} \div n = \frac{m}{2} + \frac{m}{2n} \leq \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2}$ ，可知牌疊 A 中牌位順序為第 $\frac{m(n-1)}{2}+1 \sim$ 第 $\frac{m(n+1)}{2}$ 之牌，勢必被置於 $m \times n$ 階牌陣 R_1 之第 $\frac{m+1}{2}$ 中，亦即觀眾在牌陣 R_0 中任意選定的神秘牌，經程序 2 之「收牌與重排」作業之後，都必然會落在新牌陣 R_1 之「居中列（即第 $\frac{m+1}{2}$ 列）」。
- （3）由於在牌陣 R_1 執执行程序 3 之「收牌」作業時，神秘牌所在之行被「收牌」之前與之後，都各有 $\frac{n-1}{2}$ 行之牌（即 $\frac{m(n-1)}{2}$ 張牌）需被回收，而神秘牌又位居於所在之行的「居中列（即第 $\frac{m+1}{2}$ 列）」。
因此，神秘牌在牌疊 B 之牌位順序，無論是「由上往下」或「由下往上」數，都會

「居中」，即是牌疊 B 之第 $\frac{mn+1}{2}$ 張牌。

2. 程序 4、5 之設計目的與原理解析

程序 4 之設計旨在強化本魔法活動之隨機變化性與神奇性，故觀眾可從牌疊 B 上半部取出的牌數 x ，是容許在 $1 \sim \frac{mn-1}{2}$ 之範圍內自由變化的，亦即牌堆 N 之牌數 x 是一個變數。程序 5 之設計旨在逆轉「取走 x 張牌後之牌疊 B 的餘牌」之前 $\frac{mn-1}{2}$ 張牌的牌序，以促使逆轉之後所形成之牌堆 M 的第 x 張牌，原先必定是牌疊 B 之第 $\frac{mn+1}{2}$ 張牌（即居中之牌、也是神秘牌）。

為何執执行程序 4、5 之後，必能達成上述目的呢？其原理解析如下：

- (1) 牌疊 B 經執执行程序 4 取走 x 張牌之後，所餘牌疊之前 $\frac{mn-1}{2}$ 張牌，原先在牌疊 B 中之牌序依序應為第 $x+1 \sim$ 第 $x+\frac{mn-1}{2}$ ，即所餘牌疊之牌序為第 $1 \sim$ 第 $\frac{mn-1}{2}$ 之牌，也是依序對應於牌疊 B 之牌序為第 $x+1 \sim$ 第 $x+\frac{mn-1}{2}$ 之牌。
- (2) 由於所餘牌疊經程序 5 之後，其前 $\frac{mn-1}{2}$ 張牌之牌位會被逆轉，即其牌序為第 $1 \sim$ 第 $\frac{mn-1}{2}$ 之牌，會依序對應逆轉成牌堆 M 之第 $\frac{mn-1}{2} \sim$ 第 1 張牌。
- (3) 綜觀 (1)、(2) 可知牌堆 M 之第 $1 \sim$ 第 $\frac{mn-1}{2}$ 張牌，也就是依序對應於牌疊 B 之第 $x+\frac{mn-1}{2} \sim$ 第 $x+1$ 張牌。又 $1+(x-1)=x$ 且 $x+\frac{mn-1}{2}-(x-1)=\frac{mn-1}{2}$ 。因此，牌堆 M 之第 x 張牌，也就是牌疊 B 之第 $\frac{mn+1}{2}$ 張牌（及居中之牌、也是神秘牌）。

* 由於本魔法活動在關鍵處均以使神秘牌成為牌疊的「居中之牌」來佈局，並藉「牌序逆轉」來建構符合妙算要訣之環境，故將本魔法活動之設計原理以「牌序居中與逆轉法」稱之。

二、妙算 $n \times m$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數， $m \leq n$) 階矩形牌陣之神秘牌

由於 $n \times m$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數， $m \leq n$) 階矩形牌陣與 $m \times n$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數， $m \leq n$) 階矩形牌陣互為轉置矩陣，基於兩者之「列 $\leftrightarrow$ 行」轉置關係，可知只要將「妙算 $m \times n$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數， $m \leq n$) 階矩形牌陣之神秘牌魔法活動」的演示程序內容中涉及「列」與「行」字者，也依「列 $\leftrightarrow$ 行」之原則修訂，便可輕易建立出適用於「妙算 $n \times m$ (m 與 n 均為大於 1 之奇數， $m \leq n$) 階矩形牌陣之神秘牌魔法活動」之演示程

序（含妙算要訣）。限於篇幅及留給讀者思考空間，也請讀者自行建立。

伍、三種「妙算矩形牌陣之神秘牌魔法活動」之評比

為了提供讀者對上述三種「妙算矩形牌陣之神秘牌魔法活動」有一整體的認識，筆者將有關之內容要點與特色評比統整如表 5。

表 5 三種「妙算矩形牌陣之神秘牌魔法活動」之內容要點與特色評比一覽表

妙算方法	適用牌陣	操作牌陣或其它	妙算所需資訊	特色評比
矩陣轉置關係法	任何 $m \times n$ 階矩形牌陣	執行一回牌陣轉置使其牌陣型式由 $m \times n$ 階變成 $n \times m$ 階	神秘牌位在牌陣轉置前後之列序	妙算要訣簡捷且通用於任何矩陣，惟活動歷程過於單純，致隨機變化性與神奇感不足。
n 進制密碼數法	$n \times n^k$ 或 $n^k \times n$ 階	執行 k 回牌陣變換，以衍生 k 個同型牌陣	神秘牌位在 $k+1$ 個同型牌陣之列（行）序	活動歷程多步驟富神奇感，惟妙算要訣較複雜。
牌序居中與逆轉法	$m \times n$ （ m 與 n 均為大於 1 之奇數）階	執行一回牌陣變換，以衍生一個同型新牌陣。也對回收新牌陣所得牌疊之半數牌執行「牌序逆轉」作業	觀眾自回收新牌陣所得牌疊之上半疊中任意取出的牌數	活動歷程多元富隨機變化性，且妙算要訣簡捷，不需透過神秘牌位在牌陣之任何列序或行序資料，也能隨觀眾隨機所取走的牌數 x ，在經「牌序逆轉」作業之牌堆的第 x 張取出神秘牌，故本活動頗具神奇感。

陸、結語

本文所述之三種「妙算矩形牌陣之神秘牌魔法活動」，雖然都是以一副撲克牌（54 張）做為魔法活動之媒介工具，來引介其魔法演示程序。但是從筆者設計這些魔法活動背後所植基的數學原理之論述內容，讀者應不難看出，本文所提出之各種「妙算矩形牌陣之神秘牌」的要訣，是具有一

般性的，無論牌陣中的牌數多少或牌面內容如何，只要矩形牌陣型式符合其典型規格，均能一體適用。因此，如 Adler (1957) 所提出之「妙取 5 階方陣之神秘牌」的古老魔術，因其牌陣型式可表徵成 5×5 、 5×5^1 、 5×5 （5 為奇數）等三種典型規格，故您也可依序使用本文所提出之三種殊途同歸的妙算法進行魔法演示。此外，這些魔法活動除了可改用互異之數字卡、圖卡、字卡來進行外，也可使用相同的硬幣來進行，例如「在以 8 個 10 元硬幣所排出之 2×2^2 階矩陣中猜出觀眾心中所選定之一個硬幣」的魔法演示活動，即是自古以來所流傳之「八仙過海」戲法，筆者大約在 30 年前曾目睹前屏東教育大學校長林顯輝博士（當時擔任屏東師專教務主任，現任美和科技大學校長）表演過，雖然其猜出神秘硬幣之要訣不同。

由撲克牌或數字卡所組成的矩形牌陣，除了可用來進行本文所提出之各種妙算神秘牌魔法活動之外，尚可用來設計導引觀眾或學生建構出矩形牌陣之另一神奇性質，筆者稱其為「矩形牌陣之『列（行）牌點大小順序守恆性』」。限於篇幅，容後再述。

參考文獻

Adler, I., & Adler, R. (1957). *Magic house of numbers* (8th ed.). New York : The John Day Co.