

探討認知師徒制在數學學習之應用

-以「因數」學習為例

陳蕙茹

高師大科教所博士班

高雄市新興高中

壹、數學教育的轉變

Butterworth(1992)認為近二十年來認知發展研究，有三個明顯的改變，在「認知」方面從強調個體內在的認知歷程轉變成強調認知發展源於社會情境；在「研究方向」也從認知歷程的研究轉變成認知現象的研究；並強調知識的獲得與「社會脈絡」有關。

根據過去十年的研究所發現傳統數學的缺點，數學教育不應是填鴨學生的學知識，也不應該只是教數學技巧與一般的認知技巧，而是應該把數學當作建構個人經驗的文化發展活動。把數學教育視為濡化(enculturation)的形式，其中所謂的「濡化」是指在環境中把數學融入不同的實務，學生與老師因此產生數學意義。因此數學活動可以製造歷史且變成我們社群文化遺產的一部分（van Oers, 1996）。

目前國中數學在教材上面臨兩個主要的問題，首先是中小學教材銜接的問題；再者因教科書版本眾多且編排方式差異很大，造成學生學習與教師教學上的困擾，尤其是轉學生的問題顯現出版本的銜接問題。老師必須隨時檢驗學生的程度，並了解學生的先備知識才能幫助學生有學習。已公佈在教育部網站的九十四年數學課程綱要中，發現「因數、倍數」的部分在國中小有重疊之處，在不學制的銜接下易造成遺漏，因此筆者嘗試整理國中小因數單元的教材內容從認知師徒探討相關的數學學習。

貳、把學習視為有意義的活動

一、內化

知識的獲得不管是來自他人的發現或傳送、還是互動中產生的經驗，傳統上將學習視為學習者內化知識的歷程；內化在不同的解釋中所扮演的角色也不同（Lave,1991）。Piaget 認為內化指個體在適應環境時，依賴外界物理環境的成分漸減，而運用內在結構認知來思考的成分增加，其中包含了同化(assimilation)、調整(accommodation)、平衡作用(equilibrium)(張新仁等,2003)。Vygotsky 則把外在操作的內在重建稱為內化。內化的過程包含一系列的轉換。最初代表外在活動的操作被重新建構，並且開始發生於內在；從人際間的過程轉化成個體內的過程，而人際間過程到個體內過程的轉化是長期一系列發展事件的結果（蔡敏玲 陳正乾, 1997）。

二、濡化過程中產生的「意義」

Leont' ev(1975)提到，在濡化（enculturation）的過程中，產生的意義可區別出兩種，分別為文化意義（cultural meaning）和個人意義（personal meaning）。

（一）文化意義（cultural meaning）

指在處理由文化的歷史所建立的世界時，所產生的知識和技能。包含陳述性知識和程序性知識。文化意義是由「符號」所表徵出來，最常用的是「語言」。Leont' ev(1975)提到「語言」雖然是意義的攜帶者（carrier），但不是意義的創造者（creator）。

（二）個人意義（personal meaning）

基於動機觀點是個人對活動中發展的行動與目的時，所產生價值的歸因。表示個人在文化活動中的重要性，考慮有關動機、社會地位、生活目標與抱負。

文化意義可以轉變成課程內容，可以被教；個人意義無法被教，只能在參與產生。兩者並非獨立處理。如傳統教學只傳遞文化意義而

不考慮個人意義，就產生「記憶性」學習。有意義的學習包含了這兩種意義，有意義的學習過程指的是將個人意義依附在所涉及到的行動、規則、方法和結果上(Leont'ev, 1975)。

參、將數學視為文化活動

Griffith 認為在解題中，數學的特徵是「凌亂的活動」，當猜測或沒有共同的正明方式時，有時候是錯的且用不同的語言符號表達。「Real mathematics」被設想為人類透過推論、討論、判斷，追求物理、文化世界意義化的歷史發展。數學是用來組織心智與經驗的工具並依賴於符號的使用。Vygotsky 證明了人類獲得文化環境的接觸管道是透過在社會文化活動中以初學者身分的參與，當年輕兒童不能自己執行活動時，必須藉由父母或年長兒童的協助。

(一) 近側發展區的學習

近側發展區是指兒童可以與較高發展成效學習的活動環境。近側發展區在不同的解釋中所扮演的角色也不同。它是指學習者獨自工作的解題能力與透過協助或與有經驗者合作所得的解題能力間的距離；因此對初學者提供鷹架的教學，但到最後的執行就沒有協助。它也是指由社會歷史背景所提供的「文化知識」(一般來自教學)與個人每天的經驗間的距離。Hedegaard(1988)認為是來自於教學的已知知識 (understood knowledge) 和來自於個體的主觀知識 (active knowledge) 間的差異。

以上兩種詮釋法大部分將學習的社會特質侷限在「將內化視為個體從文化環境中獲得過程」。並未顧及學習在社會世界中的地位。第三種則是 Engstrom 所定義的，個體每天活動和從歷史角度看社會活動的新形式間的差異。而這社會活動的新形式可以解決每天活動中的問題。

（二）學習的行動心理學（action-psychological）方法

Vygotsky 的學習和發展方法的本質與學習的行動心理學有關。

「action」是指從一些對象（material or mental）原始的形式改變成另一種形式。例如心智程度的轉換：

$2+2 \xrightarrow{\quad} 4$ or $5-1$ 的形式，也是 action。

人類可以反省行動的執行，而後改進或根本的改變執行。行動的反省部分稱為「定向」（orientation）其重點是放在相關的對象的行動、改變此對象的方法、如何評價結果上。其意指在給定的情境中，找出適當的改變。人們運用的是可得的文化工具如知識、規則、方法、概念。此觀點將學習視為一個活動或行動的品質改變的過程。至少區別出兩種變形：

（1）延伸：藉由增加新的行動來擴展原有的行動。

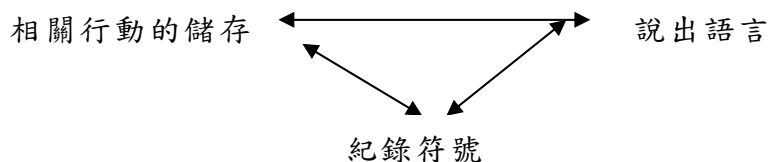
（2）Microgenetic 發展：行動可以變的更流暢、精簡、轉移到其他情境、自動化等等。兒童可以用新的方法執行舊的行動。

學習重要的時刻是當行動變成相關的信號或符號的時候。從那時候起，行動就變成符號的一部分。當然行動可以溝通並存在記憶裡。

（三）將符號形成的角色扮演

符號指的是相關行動的特殊化儲存。他促使學習者不必實際執行行動，指透過思考其行動來完成行動，並鞏固了共享意義的發展。在持續調查的活動中-假設、檢定、諮商相關的符號-發展符號的意義，並藉由和他人溝通來了解或精緻符號的意義。Vygotsky 認為文字意義的發展與系統化過程是學校概念形成的核心。概念形成是一種持續的人類學習活動，學習如何有系統去說有關真實世界的一些部分，這屬於社會文化學習活動。

符號-概念的形成是透過「寫」的形式所呈現意義的互動，符號紀錄形式，對讀寫能力而言，在文化歷史方法中是重要的。符號系統與行動的關係。如下圖所示：



(四) 學習活動中教師與學習者的角色

學習活動是意義的諮商、學生意義與他人意義的比較與交換。學習活動包含以上兩種討論，稱為多數談話。在學習活動中教師的主要工作是促進諮商和引導學生討論並重構文化共享意義。學習者的角色是反省者、評鑑者，提供新的或對照觀點。因此新的學習過程的產生是指教師與學習者在社會共享活動中，融入新的活動、角色、或社會功能。

肆、數學認知師徒制

數學應該發生在學生有意願參與並有能力參與社會活動的環境中。教師從此引導出有方向性的活動中的行動，即引出有意義部分的活動。其中關鍵的問題就是執行的方法。教師的主要工作是：確定解題活動可以真實化以及組織共享活動時所需的數學內容。

剛開始學生無法自己完成活動中的觀點，所以老師要協助學生解題，提供數學活動的暗示，詳細檢查結果，並表達反對的理由、提出不同解題方法，最後老師要評估最後的答案。

從認知師徒制的觀點，學習是在認知及後設認知上經由專家的引導，更勝於只有物質、技巧和過程。任務目標技能的執行過程是被外顯，因此師生可以觀察、給意見、修正以朝向完全。具體化的過程及方法讓師徒制朝向成功。在所有階段的透明關係，促進學習者診斷和反思錯誤。以 Schoenfeld(1983)提倡小組合作解題為例，他認為當學生以半獨立狀態進行解題時，提供機會給老師指導學生解題；實際上老師無法有效的指導學生回家功課及課堂問題。當學生練習「控制過程」時，在二選一的解題方法的選擇以導致連接過程中，透過討論、辯論而作小組決定是有必要性的。這決定促使在進行監控、評價某人的改進時，是可以發展後

設認知技能的。實際上，學生在學校很少有機會可以參與合作工作，小組解題讓他們以合作的形態執行真實世界的解題。大部分學生對他們的能力沒有安全感，尤其是遇到較困難的題目時。當他看到其他同學的掙扎時就減輕的一些不安全感，因為他了解到不是只有他很難理解，因此而提高自我信念。其他重要的理由是在解較複雜的問題時，可以將角色與活動區別與具體化。成功的解題，在解題過程中在不同的點中至少需要三個不同的角色：調節者或執行者；提供選擇路徑的發展者；選擇的批判者。小組合作解題區別、具體化這些角色：不同的人自然扮演不同的角色，解題是沿著這些路徑展開。小組討論與作決定塑造了一個相互作用模式-在過程中的個體必須內化到成為一個成功解題者。當相互教學時，學生可能扮演不同的角色，他們需要內化所以在再活動中會實務參與。Lave & Wenger (1991) 綜合一些學者的理論提出認知師徒制六個教學方法：示範、訓練、鷹架、闡明、反思、探究。

伍、數學教室中之應用--以因數為例

「數學概念」就如一棟數學建築物的基石，然而有些老師，認為數學概念的教學太過簡單，往往直接就以三兩句話帶過，將重點擺在高層次的問題上，就深怕漏教了一題，卻忽略了學生的想法。在傳統的教學法裡，學生無法直接接觸到老師解題的想法，因此我們希望透過認知師徒制，發展學習活動，讓學生能夠更有效學習數學。

目前國中數學教科書的版本很多，且教材編寫方式有些不同。例如在九年一貫暫行綱要的能力指標「N-3-20 能察覺整數的最大公因數、最小公倍數、質數和合數，並能將一個數做質因數分解」部份，各版本對「質因數分解」與「標準分解式」的定義有些微不同，不過每個版本都有提到將一數化成質因數的乘積，並表為指數形式。九年一貫暫行綱要內有關「因數」部份的能力指標除了「N-3-20 能察覺整數的最大公因數、最小公倍數、質數和合數，並能將一個數做質因數分解」以外，還有「N-3-18 能察覺整數的因數、倍數、公因數、公倍數」。

以下筆者就「將因數教材轉化為數學活動之探討」、「認知師徒制在數學教室

中之應用」兩部分來說明：

一、將「因數」教材轉化為數學活動之探討

在濡化（enculturation）的過程中，產生的文化意義可以轉變成課程內容，由「符號」所表徵出來。

例如，「 (a,b) 」表 a,b 的最大公因數。

符號指的是相關行動的特殊化儲存，在持續調查的活動中-假設、檢定、諮商相關的符號-發展符號的意義，並藉由和他人溝通來了解或精緻符號的意義在設計。

例如，透過舖地磚的活動，透過教（學）具實際操作，讓學生思考問題，提出假設，互相溝通討論，了解最大公因數的含意。

符號-概念的形成是透過「寫」的形式所呈現意義的互動，符號紀錄形式，對讀寫能力而言，在文化歷史方法中是重要的。此觀點將學習視為一個活動或行動的品質改變的過程。

例如，短除法的教學以 910 為例，

學生的先備知識為能將寫成質因數乘積的形態，

短除法教學步驟

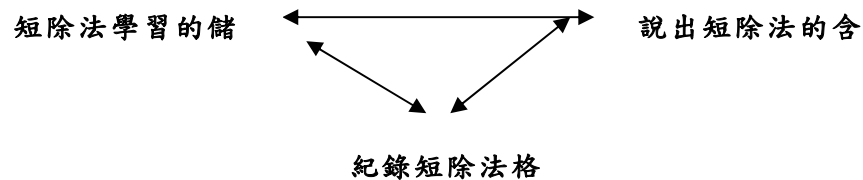
（1）先讓學生看懂短除法的紀錄格式

$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 910 \\ \xrightarrow{\quad 2 \quad} 2 \mid 910 \\ \hline 455 \end{array} \\ = \boxed{2} \times \boxed{455} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 455 \\ \xrightarrow{\quad 5 \quad} 5 \mid 455 \\ \hline 91 \end{array} \\ = \boxed{5} \times \boxed{91} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \begin{array}{r} 910 \\ \xrightarrow{\quad 2 \quad} 2 \mid 910 \\ \hline 455 \\ \xrightarrow{\quad 5 \quad} 5 \mid 455 \\ \hline 91 \end{array} \\ = \boxed{2} \times 455 \\ = 2 \times \boxed{5} \times \boxed{91} \end{array}$$

(2) 讓學生了解短除法的紀錄格式的含

(3) 讓學生應用短除法的紀錄格式。

其教學運作模式如下：



「Real mathematics」被設想為人類透過推論、討論、判斷，追求物理、文化世界意義化的歷史發展。數學是用來組織心智與經驗的工具並依賴於符號的使用。從我們每天的數學社群中了解「真實」。

例如，透過生活情境題，如工廠排值班問題、鋪設地磚等實際問題讓學生了解數學的真實性。

二、認知師徒制在數學教室中之應用

(一) 透過認知師徒制模式幫助學生「內化」、「濡化」知識

Lave & Wenger (1991)提到認知師徒制的六種教學方法：示範、訓練、鷹架、闡明、反思、探究。

(1) 從「示範」到「訓練」談起

「示範」是指學生可以透過觀察專家的執行，建立解決問題的過程的概念模式，要求內部（認知）過程及活動的具體化。「訓練」則是觀察學生執行任務的情形，可直接指導學生以前所未注意到的方面，或提醒學生他知道、卻被忽略的方面。Piaget 認為內化指個體在適應環境時，依賴外界物理環境的成分漸減，而運用內在結構認知來思考的成分增加，其中包含了同化、調整、平衡作用（張新仁等,2003）。Vygotsky 則把外在操作的內在重建稱為內化(蔡敏玲 陳正乾, 1997)。Griffith 認為在解題中，數學的特徵

是「凌亂的活動」，當猜測或沒有共同的證明方式時，有時候是錯的且用不同的語言符號表達。

因此建議教師在「示範」時先考慮情境問題，運用問答方式來示範解題，讓學生了解專家思考模式；而在「訓練」過程中，拋出「凌亂的活動」似的情境問題，製造學生的認知衝突，教師於其中給予提示或暗示來幫助學生解題。

例如，「示範求最大公因數」的解法時，老師可佈個情境問題，並示範解題策略；當不提給學生練習訓練學生求最大公因數時，可提供學生許多各式各樣的正方形塊，並給每組一塊木板，讓學生用正方形快將它填滿，發現最大公因數的意義與解法。

(2) 從「鷹架」談起

「鷹架」是指教師提供支援以幫助學生執行任務，這些支援可以是建議及幫助的形態。鷹架必須能是能診斷學生現在的技能程度或遇到的困難。因此建議老師再提供鷹架時可以與評量結合，不僅可以診斷學生的學習困難，也可適時提供補救教學。

例如，小櫻 求 36 和 60 的最大公因數時的作法如下

因為 $36=4\times 9$, $60=3\times 4\times 5$ 所以 $(36, 60) = 4$ 。

你認為對嗎？_____

你的理由是：_____

(3) 從「闡明」、「反思」談起

「闡明」是透過提問的方法，引導學生闡明或精緻原始理論，讓學生在合作活動中，扮演批判者與控制者。「反思」是促使學生比較自己和專家、其他學生等的解題過程，和最後的專家認知模式。

因此在教學活動設計上除了讓學生扮演解題者外，也該讓他們同時扮演批改者的角色。當然也可配合多元評量，如二階

段診斷評量、複式評量、概念圖、、、等。

(4) 從「探究」談起

「探究」是指教師淡出到最後，要能促使學生自己去進行問題解決。例如，請學生設計與最大公因數有關的數學遊戲，如撲克牌遊戲、賓果遊戲、、、等。

三、透過認知師徒制模式探討數學活動運作模式

(1) Schoenfeld 的經驗

Schoenfeld(1983)提倡小組合作解題，除了提出學生解題時所需的捷思策略外，還強調解題時的後設認知策略，如監控策略。小組合作解題時不同的人自然扮演不同的角色。因此若要實施合作解題，建議採用異質性分組，學習成就較低的學生可以從高成就組員的解題策略中，學習解題技巧；只是教師應留意組員合作意願，適時給予鼓勵。除了合作解題外，組員也可嘗試合作擬題，透過擬題過程，反思數學概念。

(2) 教師的角色

Vygotsky 證明了人類獲得文化環境的接觸管道是透過在社會文化活動中以初學者身分的參與，當年輕兒童不能自己執行活動時，必須藉由父母或年長兒童的協助。因此在教學前教師是課程設計者，將數學意義轉化為學可以接受的學習活動，營造學習氣氛；在教學中，不僅要示範解題，也要引導學生解題，並適時的提供鷹架，來幫助學生學習。

(3) 學習者的角色

在學習過程中，學習者應是主動的意義建構者，是積極的參與者，不僅觀察教師與其他同學解題模式，也要參與討論溝通，不僅扮演解題者，也是批判者，甚至是探究創造者。

陸、結論

把數學教育視為濡化(enculturation)的形式，其中所謂的「濡化」是指在環境中把數學融入不同的實務，學生與老師因此產生數學意義。學習活動是意義的諮商、學生意義與他人意義的比較與交換。新的學習過程的產生是指教師與學習者在社會共享活動中，融入新的活動、角色、或社會功能。

從認知師徒制的觀點，學習是在認知及後設認知上經由專家的引導，更勝於只有物質、技巧和過程。小組討論與作決定塑造了一個相互作用模式-在過程中的個體必須內化到成為一個成功解題者。當相互教學時，學生可能扮演不同的角色，他們需要內化所以在活動中會實務參與。九年一貫課程強調的是帶的走的能力，當學習者可闡明、反思數學知識，進而探究數學知識，則學習者則已獲得數學能力。

參考文獻

- 張新仁主編（2003）。*學習與教學新趨勢*。心裡出版社。
- Vygotsky, L.S.著，蔡敏玲與陳正乾譯（民86）。*社會中的心智(Mind in society)*。心理出版社。
- van Oers .B(1996). Learning mathematics as a meaningful activity. In Steffe, Nesher, Cobb, Goldin, and Greer (Eds.) *Theories of mathematical learning*, pp. 91–113.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991) *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.