

例證的意涵與數學概念建構之教學

陳嘉皇

崑山科技大學師資培育中心助理教授

壹、前言

以「例證」(examples)作為學習理念的發展並非是最新穎的，「例證」的發展對於教科書內容要素的建構，以及新概念和歷程的呈現是很重要的。只要這些「例證」能顯示出包含於歷程中足夠的訊息，那麼就能允許一些勤勉的學生，不需要額外的教學就能學會它們。學生若能從「例證」的基本歷程進行推論，然後加以理解，那麼也能應用到新的問題上。Papert (1993)認為學習最大的效率是發生在學習者透過其自行形成的行動，而與建構事物連結之時；Fisher (1998)則將學習關聯到一種興奮 (wondering) 的狀態，宣稱興奮是種經驗愉悅狀態的結果。在數學教室裡，首要的教學工作就是激發學生學習的動機和注意力，注意力如何能被建構而朝向對變數的注意和辨識呢？當然就是提供學生驚奇，因此，學習就是給予結構注意力而所經驗改變的一種名字 (Mason, 1989)，也就是，學習是處於一種我們如何專心於特殊的情境，和經由專注與區分的歷程，注意所感受的事物是什麼。學習是項經驗相傳、承先啓後的歷程，因此，事物相關例證的建構對於學習而言，是能提升並且有幫助的，因為學習可理解當成是種可以產生概念並改善建構和重構的活動，而例證教學恰可支持並達成學習的理念。

本文擬藉著例證教學的介紹與應用，幫助教師與學生在數學課堂上經驗並學習例證的結構，發展對事物的分類、設計問題、賦予事物意義的能力，並藉著尋找事物特殊的限制，分析、建構以及評鑑所示範的例證概念。總之，透過例證的教導與學習，除可幫助學生順利建構完整紮實的數學概念，我們也將能夠學習如何學習。

貳、例證與例證空間

Watson 和 Mason (2005) 認為，例證與下列的敘述有關：

- 一、例證是概念和法則的描述，例如特殊的等式可以描述線性等式，或是選取兩個分數能夠證明其值是相等的。
- 二、例證指的是執行者所使用的不再是一般的定義和理論，例如使用一種角度的動態影像，沿著圓的圓周上點的移動，而指出相同部位的角度是相等的。
- 三、例證是從教科書產生的疑惑問題或藉由教師當成證明特殊技巧的一個手段，通稱為「工作的例證」(worked examples)。
- 四、例證呈現的問題可以在將學生當成學習的手段而利用或運用時加以執行，並且獲得流暢的特殊技巧，這通常稱之為「練習」(exercises)。
- 五、在教室裡所運用的表現，針對一般性數學的推理而當成是未經琢磨的材料，例如數字的歸納可透過特殊情境的例子，然後針對其模式(pattern)而加以檢驗。
- 六、例證是指特殊的脈絡情境可作為激發數學學習的案例。

藉由上述的描述，可將例證視為是種等式、圖像、模式、學習的範本和材料，也可將它看成是練習、示範、解題等。從這個定義亦可以勾勒出例證空間(examples space)的概念，例證空間是種可以滿足某類功能和建議的集合體，這些集合體可視為是數學教導和學習的核心。例證空間是建構一項歸納時，可以用來解釋和貫通例證，以及在每個可能的變數層面中，允許某些程度改變的相關觀念。另一種描述例證空間結構的方法，是透過探索一些特徵的不變性(invariance)，有力的採取相關物件「哪些特徵相同？哪些特徵不同」的集合暗示，進而發展出的一種觀念。

有許多數學概念是內在或外在於例證的空間。一些雖然內在於例證空間但塵封於角落，因此與其他概念的連結就不是那麼清晰，若是進入心中的例證是清晰的話，中心影像就無須提供空間中每件事物的管道。空間包含了內容和連結，可在整體的空間中使用，存在的一些個別的元素，也能藉由暗示的線索而被主觀的引發，有些物件曾經熟悉但不存在例證空間，當在特殊的時間和場所會被產出。

這些被想成爲外在於現在空間外的物件，即使在另一個狀態下也能被想成屬於內在空間的物件。

參、例證教學與數學概念建構的關係

要產生例證，我們必須模仿所給予的例證樣本，同時也要建構、操弄、觀察和轉化概念的知識結構或是形塑相似的物件，對於這些挑戰詳細的說，就是要使例證能夠精細的產生。Bell、Swan、Shannon 和 Crust（1996）等人認爲數學教育課程的發展常暗示著學習者創造例證的活動，基本上，這是一種自我評鑑的策略，但這些作者很清楚的認識到，針對評鑑目的而產出的例證，也可以形成未來數學概念的想法和更深入的理解。從學生的角度說明例證與數學概念的關聯，自然就產生了以下幾項議題（Watson & Mason, 2005）：

一、例證是個別的（individual）以及情境的（situational）

例證的塑造除了依賴學習者的知識、多方面的經驗和性向才能進行，另外也可以藉由暗示的措辭（wording）、誰創造了它以及處在何種情境下而被建構，在相同的情境下，不同的學習者可能反應出不同的例證來；在不同的情境下，相同的學習者也可能反應出不同的例證。

二、一般性（generality）的知覺是個別的

對例證的一項質疑，會認爲單一的例證或是某一類型的例證、喜好的或是可能的例證是否是一樣的。可以這麼說，相同的例證可被視爲是種特殊的個案，也是不同的學習者在相同的學習環境下，倚賴其所見而能作爲變數，以及如何改變等，所形成的某一類型的表徵。

三、例證可以被知覺或經驗當成是被結構化的空間的成員

例證通常不是孤立的，依據學生所建構的，及我們所謂的例證空間，反而被知覺爲是某一類型潛在例證的案例。透過目前的觀察，學習者經驗例證空間的機會，可以對情境、暗示以及態度產生反應，一些看法就能變成習慣，而另一些則具條件的約束。例證空間不僅可以表列，因爲他們具有內在、同一的結構，可以透過空間的成員及類型而被整合，並經由此種結構，例證就能產生。它們的內容與結構都是個別和情境化的，相似的結構空間可以採用不同的方法而被經驗，在代數和幾何方法之間會呈現出特別明顯的差異。如果教師呈獻給學生的一些傳統

和古典的例證是有用的，只要有用，熟悉他們並加以類化，充分的統整到例證的空間，那麼在不同的情境下都能出現在心中。

四、例證的空間能被學習者藉由外在的暗示而加以探索和擴展

學習者在特殊的暗示下，所產生的這些例證空間能夠藉由情境裡獨特的例證，加以探索和擴展，當成進入新類型例證的門口（doorway），能針對例證的特殊性質給予限制，藉由改變封閉的反應而到開放的反應，並能一窺其無限。

使用數學當成一項建構的活動是非常有用的，可以將建構中的事物當成學習數學的整合元素。每道數學問題都包含了一個結構，即使是解釋使用一道良好可重複的算則或是技術。例證教學的功能包含：

1. 不只是簡化建構主義者所認為的將學習者視為意義的建構者。
2. 不只是激進建構主義者所認為的將學習者視為是積極嘗試事物而探索適合過去和未來的經驗。
3. 不只是社會建構主義者所認為的將學習者視為是能藉由現今更有經驗的人，參與相關的實務，以涵養談話的方式和行動。
4. 數學的建構認為學習是在建構事物以尋找特殊的限制，以便當例證空間被啟動時，他們能夠具備複雜和旺盛的精力，充分的與其有關的元素交互作用，並能適宜的重構和更新結構。

肆、例證教學的要領

Hazzan 和 Zazkis（1997）曾說：特殊數學目標的建構，可以藉由它的特質而被描述，並可以幫助學生在高層次的抽象思考採取相關數學概念的心智結構。對於要學習更多的數學概念，與超越數學領域一般的疑難和問題，所進行的數學例證教學，必須掌握以下幾項重點：

- 一、例證必要的結構，需有學習者經驗的歸納和知識的組織以配合現在的需求，因此需提升學生重組（reorganization）的能力。
- 二、例證結構所具備的特質（properties）對學習者和特徵而言都是新的，因此引導個人例證空間的擴展是非常重要的。

三、擴展例證空間的概念對於新的結構知識提供了一個逐漸增加的方向。

四、因為許多數學課程是關於物體類型、特徵和關係的探索，示範可謂是種主要的認知策略，讓教師為學生搭起鷹架，當學生本身能建立例證的習慣時，就可解除示範的教學

因此，例證教學應具備以下要領：

1. 可以提供一種訓練式考試的方式呈現學習者能夠回答的問題。
2. 可以使用特殊的物體，藉由定義或理論的條件，指出需包含以及必須排除的事物，舉例來說，畫出一特殊的長方形，去呼應教科書裡所給予的長方形的定義。
3. 可使用特殊的物體指出在某一定義或理論裡，藉由強調其在證明中的角色，或藉由顯示此證明在缺乏條件下如何失敗，以彰顯這些特別條件的重要性，舉例來說，利用 $f(x) = |x|$ 去指出其本身的連續性是無法充分的確保 x 的每一個值與它有一變異的關聯。
4. 可以提供特殊的物體指出藉由歸納所暗示的變異數的層面，舉例來說我們可將 25 與 225 兩者當成奇數來看，或兩者都是正方形，但兩者不具相同的因數，因此，他們可以提供可能歸納時的一些概念，而且也能安置限制在所能宣稱的事物上。
5. 可以選擇一物體描述複雜的結構，但所決定的事物需是學習者熟悉的，舉例來說，呈現 $3(4+5)$ 的式子介紹分配律。
6. 可以使用基本的圖畫指出一些事物，當一些特徵改變時仍可保留其不變性，舉例來說，畫出一基本的三角形圖形可以用來描述中點的一致性。

伍、例證教學實施的步驟

思考不同作業類型的一種方法，是透過對學習者真正要處理的問題是什麼著手，學生要處理的並無法告訴我們與作業關聯的企圖和行動等每一件事。所以，例證教學若有明確的步驟，將可清晰的導引出學生概念的建構。以下的步驟可以提供作為刺激我們思考如何設計例證作業（Watson & Mason, 2005）：

1. 組合例證

此作業在於顯現學生主要的影像和現在的理解程度，告訴教師學習者具備了何種知識，並提供原始的材料作為將來作業使用，包括練習。

2. 組合一個具有條件限制的例證

此作業的目的在於班上分享學生所產出的例證，促進學習者看見同一問題卻具有許多的可能性，而能組成具有更多限制且更多的例證。

3. 逐步增加條件的限制

此作業可以利用具有自由和限制的數學議題，開始先讓學生思考選擇例證的自由，例如寫下一個數字或畫出一個平行四邊形，接著呈現越來越多限制的例證。

4. 組合另外的或更加相似／不像的例證

我們也可以允許學生花時間省思發生了什麼？並且嘗試動手找出變數，要求學生「組合出更多像這樣的例證」，這可以告訴教師學習者思考「像這樣的例證」其意義是什麼。也可以要求學生「組合另外不同的例證，描述或強調一些這個例證無法探索的其他特徵」，這可以提供學習者將注意力放在不同層面可能的變數上。

5. 產出對立例證或非例證

特別注意的是這些例證的運作只能出現在一些環繞普遍性假設的情境中，每個對立假設是另一種類別的例證，每種例證在某一情境裡可作為是另一種的對立例證。而非例證則藉由顯現出一些必要的條件和限制，顯示出一概念範疇的一些事物。當符應的推測可以銜接時，非例證有時也可以提供作為對立例證。

6. 混淆期待

此作業的進行需從對答案產出的期待開始，例如「給予一個數字，其平方的值並不大於其本身」，有時縮減限制會有意想不到的驚喜，而釋放限制對某些人來說會造成研究更加的困難，此作業是設計用來扭轉學習者遠離強烈的影像，並記住該問題中關鍵字眼的出現。

7. 描述所有可以滿足特殊限制的事物

此作業只是對有關條件限制提供作例證的策略，但不是教室學習主要的目的。例如發現三個數字可以用來組成三角形的三個邊，你能說出哪些數字呢？

8. 倒轉（Reverse）

一般的作業會有一正常的法則並可將之倒轉，而使此問題將來的說明更具開放，通常會給予一個答案，並要求可能關聯的問題有哪些？例如 $5 + 2 = 7$ ，那麼 $7 = ?$

9. 探索其差異

此作業大多是數學活動和概念學習的核心，創造物體並能探索其定義的範圍是種學習數學結構有力的方法，而且它能幫助學生針對語意的差異理解其理由。

10. 隱藏

此作業開始於呈現一個歷程最後的階段是什麼，然後要求學習者採取逐逐漸複雜的方法，倒轉一種方法並隱藏其答案，例如一直線等式的答案是 $P = 6$ ，那麼此等式可以是什麼，依你的程度列出最複雜的。將答案藏匿於情境下可以給予學習者組合其自己有關文字題的經驗，並提供對一些令人憎恨、毀謗、沒什麼好挑戰等問題較廣泛的看法。

11. 使用方法或目標的特徵當成起始點

此策略並沒有直接使用答案而是一些過程中相近的結果，或是方法本身，當成重構某一歷程的基礎，例如，什麼樣的圖形，當我們沿著直線分割時，其產生的小區塊形狀會與原來的圖形相似？

12. 發現

每種數學問題都會引發輕微的差異性期待和結構，對學習者佈題，通常是將簡單的答案連結到影像的旋轉，但此暗示期待學生碰到更多的障礙時，會採取將事物簡化，發現一規律來。

13. 產生歸納

透過上述歷程發現的規則或形式，產出模式代表數學概念的結構。

陸、一元二次方程式因數分解例證的教學

茲以一元二次方程式的格式： $X^2 + aX + b$ ， a 和 b 為整數（正或負）為例，我們使用上述的步驟來建構「例證」的技巧，這個歷程藉由發現所有與 b 配對的正整數組合開始，然後根據一次項與常數的符號進行區分。靠著一元二次方程式中具有能與總和相等（如果常數的符號是正的）和區別（如果常數的符號是負的）符號的絕對值係數就被選取。被設計到因數裡的符號，是依賴方程式裡符號的排列而決定。如果常數是正數，當一次項的係數是正數（負數）時，那麼這兩個因數相對的也要正數（負數）。如果常數是負數，當一次項的係數是正數（負數）時，那麼這兩個因數相對的也要正數（負數），而且大小因數剛好具備相反的符號。

針對學習一元二次方程式因數分解的可行性而言，這些在「例證」和問題情境中出現的規則，與平淡無奇的狀態相較，是很容易被理解的。我們思考過，讓學生一次只注意一個歷程，可能是一有效的方法。學生首先要學習探究一組配對的常數因數，可以用來合計方程式的係數，當獲得這個技巧，學生的注意力將會投注在線性符號及方程式的係數上，選擇正確配對因數以產生符號的效果，並進行因數符號的排列。

針對方程式中不同代數符號的因數組合，可藉由不同案例的辨識而進行不同的因數分解。也就是整個過程可以使用符號化的數字，然後針對方程式因數分解的規則，將之化約成一單獨的例子：首先發現方程式中配對的常數因數，然後選擇代數係數總和相同的配對因數，將因數分解寫成 $(X + c)(X + d)$ ，這裡的 c 和 d 是已經被安排設計過的因數。

$$X^2 + aX + b = (X + c)(X + d), \text{ 這裡 } c \times d = b, c + d = a.$$

對於學習一元二次方程式因數分解而言，學生必須有一些先備知識的存在。比較特別的是，學生必須知道因數分解的意義是什麼，尤其在進行方程式課程之前，他們應研讀過整數的因數分解及代數中的單項式。當利用兩個一次項乘積而運作形成方程式時，我們藉由一元二次方程式因數分解的定義，形成兩個一次項的表現，傳達方程式額外的訊息給學生。因此，學生必須具有代數符號相乘積的技巧，對因數分解作業的定義也必須理解，如此才能夠在正確的因數分解時，提供一些檢查的手段（透過倒轉相乘），獲得修正答案的回饋，這些回饋可以針對

學習的歷程提供基礎的訊息。

從倒轉相乘的因數分解定義和訓練材料的乘法例證來說，學生可以針對上述呈現的因數分解追溯代數的算則。爲了讓學生能夠觀察一元二次方程式中的常數，即因數的產出，必須理解一次項的係數爲因數的總和。爲了促進學生注意這些關係，我們融入幾個整數因數分解問題知識的修正，和指出這些因數的總和，我們也按部就班的執行乘法，讓因數的總和能夠明確的形成一元二次方程式一次項的係數。

明瞭了這些關係後，可以提供學生對於實做，以及例證學習條件下的解題引導。如我們所理解的，因數分解歷程中符號的法則，可以藉由分開的乘積呈現，並且暗示在因數分解的定義中。原則上，學生已經能夠從一般的定義推論出符號的法則，因此可發現這些法則內所深藏的每個乘積的理由，所以許多學生能夠完成此項作業。

柒、結語

例證教學是利用變數結構之間的差異，透過學生的觀察、操作、比對、歸納而引發建構的有系統之數學知識和概念，與一些例證結構的經驗。這種歷程除帶給學習者驚奇外，也凸顯出杜威所強調的「做中學」的意義和精神。在教室裡，透過不同的學習者，產生相同的例證，可以將它視爲是數學模式的表現，當一些特殊的案例逐漸形成一般性的例證時，對學習者而言就是種新的體驗。例證的創造給予學生一種結構的感覺，藉由思考可能的變數的層面和他們可允許改變的關聯範圍，數學問題是能被探索的。也就是，當學習者能發現何者能被改變，改變的幅度有多大，並能辨識新的變數，那麼就能依第一法則的順序去執行，從定義中構築物件，且使用不同的表徵模式去理解需採用何種例證，利用其他的例證和採取其他方法進行關聯。此時，數學概念和知識的轉換自然就會發生，學習自動形塑並持續。

參考資料（略）