

# 具體表徵融入數學教學之探究

洪郁雯

國立嘉義大學數學教育研究所研究生

楊德清

國立嘉義大學數學教育研究所所長

## 壹、前言

在美國數學課程原則與標準（NCTM,2000）提到，表徵是數學學習過程中很重要的一部分。數學表徵提供學習者有效的解題工具，可以幫助孩子達成數學知識的理解、和他人溝通以及推理的目的（Greeno & Hall,1997）。學生在數學學習的過程中，對於抽象的數學概念，若是沒有適當的媒介幫助他們思考以建構自我知識，學生可能會因此而無法理解算則的意義而發生學習困難，甚至對數學失去信心而缺乏學習的興趣。有感於此，於是本文研究者在教學時，嘗試透過各種具體的方式，期望把抽象的數學概念，藉由這些具體表徵的呈現，讓學生得以輕鬆快樂的理解，並且鼓勵他們在表達自己的數學想法時，也能夠運用多樣化的表徵來與人溝通以及推理。Bruner（1966）指出個體運用心像來掌握概念，或依靠照片、圖形等表徵獲得知識時，即使物體已不存在，個體腦海中仍有其心像，而心像是外在實物的抽象意義或影像，可作為運思活動的工具。由此可知，「表徵」對學生的學習的確發揮很大的作用，憑藉著它，學生能夠發揮無限的想像力和創造思考的能力，幫助自我的運思。因此，當學生在學習數學概念時，一開始他們可以運用具體物的表徵，來幫助自我了解知識的意義，在他們能夠掌握這些知識的意義之後，表徵不管是以其它符號或抽象的形式出現，學生依然可以在這些表徵之間自由選擇、運用和轉譯，以達成解題的目的。所以老師在數學教學時，應該善用各種表徵，為學生搭起思考的鷹架，使他們在具體運思階段過渡到抽象的形式運思階段能更為順利。

本文之主要目的乃是藉由三個教學實例，以探究研究者如何將具體表徵融入教學中，以幫助學生學習並理解數學概念。

## 貳、表徵的意義與重要性

### 一、表徵的意義

在數學教學中，「表徵」(representation)是個相當重要的概念。根據 Lesh 等人(1987)對表徵的詮釋，「表徵」是指心智過程模式化所使用的符號系統，如圖形、符號、語言文字、具體操作物，也就是學生內心的概念轉為看得見的、顯著的具體化之外在表現。我們可以了解「表徵」除了是人類進行學習的媒介之外，更是個體進行運思時的重要工具；尤其是當個體確實掌握「表徵」所代表的意義之後，「表徵」便進一步成為運思的材料，幫助人類思考，並且能夠對於各種表徵的形式，自由轉換以運用自如，進而解決問題。這就如同對低年級的學生而言，如果三塊甜甜圈，不管我們用畫圖的○ ○ ○ 來表示，或者用◎ ◎ ◎ 來表示，在他們了解了符號表徵所代表的意義之後，他們就會運用這些表徵來進行運思和運算以解決問題。在表徵的種類方面，各個學者(Lesh et al., 1987; Heddens, 1984)分別從不同的觀點予以分類，大致上可以分成三類：(一)具體的表徵(二)半具體的表徵(三)抽象符號。Heddens 更主張學習者必須在具體階段，將新的知識加以內化，並且有系統的沿著這些學習階段，將所學的新知識賦予抽象化的表徵。如此一來，學生才能夠在真實的世界與抽象的世界之間建立良好的連結，以改善學生在數學理解方面的困難。站在教學者的角度觀之，若是能考量學生認知學習的發展階段，適時提供適當的表徵形式給予學生學習的支援與協助，不但能幫助他們了解生活週遭的事物與現象，也能因此獲得心智能力的發展與成長。

### 二、表徵的重要性

教師的數學教學與學生的數學學習，表徵的角色功不可沒，尤其對於中低年級的學生而言，具體表徵有著舉足輕重的地位。Cobb 等人(1992)指出，具體物能夠提供學生做為解題時思考的依據，透過具體物的操作，呈現學生的數學概念，教師再透過教學介入，將學生引導並提升至抽象概念。因此，我們可以了解，個體之所以能夠不受時空的限制，順利的進行關於外在世界的理解、思考、推理，以及與他人溝通等活動，應該歸功於個體透過表徵所產生的作用(游自達，1995；蔣志邦，1994；陳啓明，2000)。

適當的運用多樣化的數學表徵，不僅能夠增進數學概念的理解，並且可以做

為與他人溝通數學想法的媒介，所以數學表徵是幫助我們思考、解題、溝通、以及詮釋各種事物和現象之重要工具。教師教學時應該好好善用各種表徵，幫助學生將它應用在真實的數學情境，以進一步解決生活當中所面臨的問題。

以下列舉研究者將表徵融入小三數學課室教學的三個實例，以探討具體表徵在數學教學與學生學習時之功效。

### 參、具體表徵融入小三數學課室教學之實例

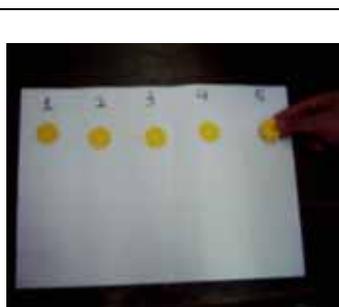
#### 一、除法教學

研究者在剛開始進行除法教學時，先是讓學生透過具體實作去分花片，讓他們在分花片的過程中了解「分」的概念，並且舉凡許多例子都是先透過「分」出去後，數量會慢慢減少，再間接與減法算式建立關係，而且每一次分完之後有可能會有剩餘，此時學生必須判別剩餘的數量，能否再多分一次。當然我們的目標是讓學生了解除法的運算，所以在教學的過程中必須由減法引入除法的算式意義，而有剩餘、無法再分的部份自然就導入了餘數的觀念。

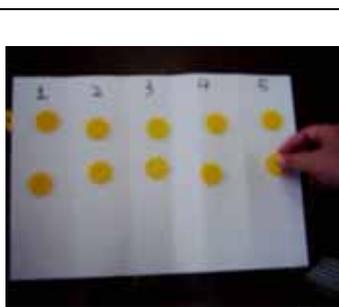
例題 1：15 個花片要平分給 5 個小朋友，每一個小朋友可以得到幾個花片？（等分除）

學生的解法：

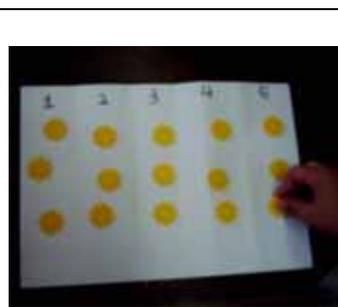
1.



2.



3.



小朋友一邊動手操作花片一邊用算式紀錄自己的解題過程，大部分的小朋友在了解題意之後會先紀錄下 1、2、3、4、5 個組別（代表有 5 個小朋友）

然後進行運算

$15-5=10$ （意思是分了一次，每人都先得到一個花片）

$10-5=5$ （意思是分了第二次，每人都得到第二個花片）

$5-5=0$ （意思是分了第三次，每人都得到第三個花片）

即  $15-5-5-5=0$ （意思是 15 個花片分給 5 個小朋友，可以分 3 次，每人得到 3 個花片）

再引入除法算式就是以  $15\div 5=3$  來表示

例題 2：15 個花片每 5 個要分一堆，一共可以分成幾堆？（包含除）

學生的解法：

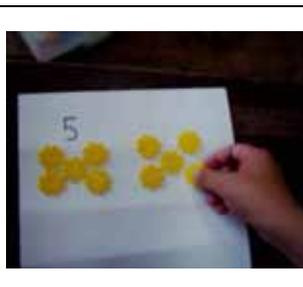
1.



2.



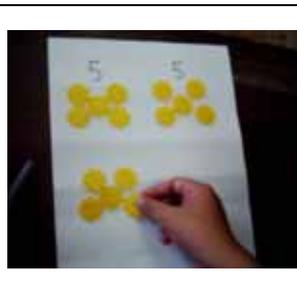
3.



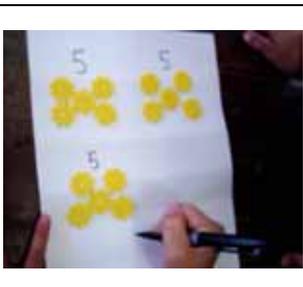
4.



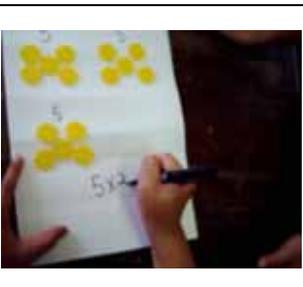
5.



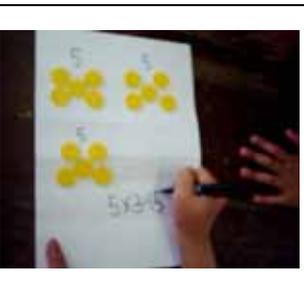
6.



7.



8.



$15-5=10$ （意思是分了一次 5 出來，得到一堆）

$10-5=5$ （意思是分了第二次 5 出來，得到第二堆）

$5-5=0$ （意思是分了第三次 5 出來，得到第三堆）

即  $15-5-5-5=0$ （意思是 15 個花片，以每堆有 5 個來分，可以分成 3 堆。）

引入除法算式也是以  $15\div 5=3$  來表示

這兩題雖然都是除法的題目，但是分別代表著等分除和包含除的概念，是老師在教學上可以特別說明的，以幫助學生透過花片的表徵，進行解題時也能充分了解題意。在此之外，研究者會鼓勵學生多思考別種解題的方式，當中發現有部分學生是利用加法運算的方式，他們是將花片以五為單位，一次一次慢慢往上加，直到加到 15 為止；或者利用乘法  $5\times 3=15$ ，算出 3 堆。

根據花片的操作，研究者發現學生利用具體表徵（花片）了解減法的概念之後，老師應該引導學生將這些概念內化，能進一步列出除法算式來表示；若學生能從具體的花片操作減法算式，再以除法算式來表示，表示他們已經能夠以有意義的形式來表徵問題情境，讓自我的解題及運思能力由具體提升到抽象階段。

## 二、水平面教學

水平面教學是學生很容易產生誤解的單元，例如瓶中裝著約三分滿的水，如果此時瓶身傾斜，水平面還是會呈現水平的狀態，但學生通常會認為水平面會跟著傾斜。在課堂上，研究者利用許多不同形狀的瓶子（如：方型瓶子、圓柱型瓶子…等），裡面裝著用廣告原料染色過的水，便於學生觀察，學生透過操作這些具體實物後，研究者請他們把看到的結果紀錄在學習單上。

1.

2.

3.

4.

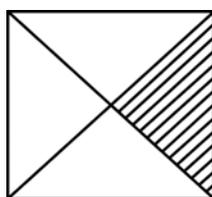


從學生的學習單發現，很多學生一開始所畫的水平面，是跟著瓶身傾斜的，

他們受到瓶子傾斜的影響，聯想水平面也應該會傾斜；然而，透過實驗觀察到這些具體實物表徵之後，他們能理解水平面還是會呈現水平，因此修正自己的答案，標記出正確的水平線來。

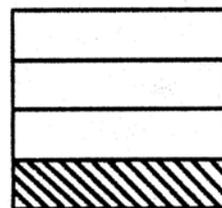
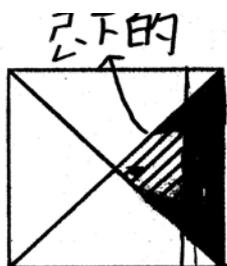
### 三、分數教學

在進行分數的教學單元時，研究者出了以下一題例題：下列有兩個一樣大小的正方形，將它們各自平分成四等份，請問兩個斜線部分的面積一樣大嗎？請打✓，並說說理由。



(            ) 一樣大      (            ) 不一樣大

有一個學生，他認為上面兩個斜線面積是不一樣大的，透過視覺上的直接比較，他先把長方形的斜線面積搬移到三角形的斜線面積上，再把長方形面積凸出三角形面積的部份取下來，補在三角形斜線面積上，他覺得三角形還有空間是長方形取下來的面積，不能完全填滿的，所以他認為三角形斜線面積比長方形斜線面積還要大。以下是這位學生的理由。



( ) 一樣大。

( ✓ ) 不一樣大。

我的理由：因為我把長方形的<sup>那一條</sup>邊過去三角形的那邊，然後我把三角形多出來的<sup>那一條</sup>給剪掉，那去三角形下面沒好的那裏，後來我發現<sup>那裏</sup>好時候，三角形還有<sup>那裏</sup>比長方形多。

2. 拿出兩張色紙剪剪看，聰明的你可不可以把上面兩個斜線部分剪下，經過你的妙手剪貼之後，重新貼在下面的虛線內，再比比看。

於是，研究者在數學課堂中，利用色紙剪貼，請學生拿出兩張色紙摺成和上面兩張色紙一模一樣的等分，並且將他們其中一等份剪下來，重新貼在另外一張一樣大小的色紙內；或者直接將三角形和長方形比比看，多的部份再剪下來重新組合，再比一次，看看他們這次發現到什麼。

學生透過剪裁色紙，發現經過剪貼將三角形和長方形重新組合，再比較之後，兩個斜線面積是一樣大的。也就是原本兩張一樣大的色紙，不管怎麼平分成四等分的方式如何，取其一等份相互比較，結果是一樣大的。以下是學生比較後的理由說明。

比較的結果是：原本兩個斜線面積（ $\checkmark$ ）一樣大。（ $\quad$ ）不一樣大。

我的理由是：因為這兩張色紙是一樣大張長的，我自己用手剪過了之後，我才知道原來一樣大的色紙不管你剪什麼的形狀都會一樣大。

不怎麼亂剪的  
圖形

由以上學生的數學寫作，研究者進一步和這位學生訪談，以確定藉由具體表徵，他真的理解了分數的概念。我們可以發現，即使原來的正方形一樣大，但是學生因為受圖形不同分法所產生的不同形狀所影響，認為三角形和長方形是不一樣大的；經由實作剪貼色紙的過程中，重新將色紙拼湊而成的圖形，藉由這樣的具體表徵，學生澄清了自我的迷思概念，並且發現原來一樣大的色紙，不管怎麼平分，只要平分的數量是相同的，那麼其中一份的面積還是會一樣大。

在實際教學的過程中，研究者發現具體表徵是很好的媒介，透過它，不僅可以呈現教師所要表達的數學涵義，學生也可以透過操作各類表徵（具體實物、符號、圖形…等），連結數學概念或者理解運算之間的關係；我們更可以經由表徵去澄清學生原有的一些數學迷思，所以表徵在數學教學與學習時是很重要的工具，有助於學生數學學習的運思、理解、和他人溝通自己的想法以及轉譯數學表徵來解題。

## 肆、結語

依據皮亞傑對認知發展階段的區分，小學階段的學童大多停留在具體運思期，因此需要透過具體物來學習。由以上的教學實例，學生藉由操作具體物，將抽象的數學概念具體化、意義化，以建構自己的數學知識，也支持皮亞傑認知發展理論的觀點。這也提醒教學者在從事教學時避免以同一種方式教學，應該善用各種表徵的方式讓學生瞭解，並讓學生運用各種表徵的形式達成與他人溝通的目的。此外，教師透過具體表徵的教學，也能澄清學生的迷思概念，藉以提昇其認知發展到更高階段。

西諺有云：「I listen and I forget, I see and I remember, I do and I understand.」，老師在進行數學教學的時候，如果僅用講述法教學不懂得善用良好的教具與學生互動，那麼學生很有可能只會左耳進右耳出，聽完馬上就忘記了；若能進一步運用各種具體的表徵來輔助教學，讓學生從「做中學」，相信對於學生的學習能有事半功倍的效果；甚至讓學生透過實際動手操作，從親身參與的活動中將具體化的表徵轉化為抽象化的概念，並且能充分理解其意義。而在解題的過程中，學生也能善於利用各種表徵，以幫助自己運思，進一步達成與他人數學溝通的目的，並培養自己解決實際生活中問題的能力，相信這樣的結果才是我們真正樂見的。

## 參考書目

- 陳啓明（2000）。不同題目表徵型式及相關因素對國小五年級學生解題表現之影響。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文，未出版。
- 游自達（1995）。數學學習與理解之內涵…從心理學觀點分析。初等教育研究集刊，3，31-45。
- 蔣志邦（1994）。由表徵的觀點探討新教材數與計算活動的設計。國民小學數學科新課程概說（低年級）（60-76）。臺北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist to representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematical Education*, 123(1), 2-33.
- Greeno, J. G. & Roger, B. H. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. *Phi Delta Kappan* 79, 361-367.
- Heddens, J. W. (1984). *Today's Mathematics*. 5th ed. Chicago: Science Research Associates.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (ED.). *Problem of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *The principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.