

從解題中發展數學思考力

林燈茂

國立屏東教育大學退休教授

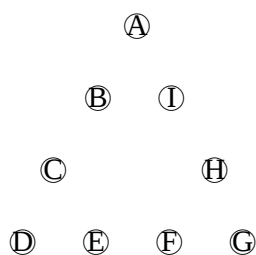
壹、前言

本文旨在回顧並解析個人在「數學解題」這門課中如何以 George Polya (1887~1985) 的解題四步驟（理解問題→擬定計劃→執行計劃→回顧）為主軸，引領職前教師去探索數字卡①~⑨配置問題的主要教學歷程，期能拋磚引玉，引發大家重視數學思考力與良好解題習慣的培養。

貳、探索主題

數字卡①~⑨配置問題：

將數字卡①~⑨配置於圖一之A~I上，使三角形每一邊四個數字之和都相等，宜如何配置？共有多少種不同的配置方式？



圖一：待配置之三角形數字圖

參、如何解題

一.理解題意

好的開始是成功的一半，故理解題意是成功解題的首要條件。能理解題意，才能掌

握問題的本質，否則冒然解題，可能導致事倍功半，甚至徒勞無功。

爲了訓練學生先理解題意再解題之習慣，筆者以下列問題來提示學生：

1. 數字卡①~⑨和圖一中的代碼A~①之個數一樣多嗎？
2. 如果數字卡改爲①~⑧，問題中其它條件不變，則此問題之解爲何？
3. 如何檢視某一配置狀態已適配成功？

解析：

提問 1~2 旨在訓練學生解題之前，要先確認解題條件是否充份或矛盾的習慣。以本題爲例，若數字卡張數少於代碼數時，顯然無法配置出每邊四個數字之三角形數字圖，當然就是無解。此一程序常爲一般人所忽視，導致捨本逐末之現象。

提問 3 則在檢驗學生是否理解求解目標。

二. 擬定計劃

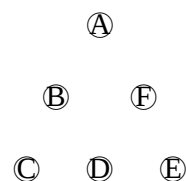
數字卡①~⑨配置問題，對學生而言是一個非例行性的問題，致其解法都採非系統性的直覺猜測檢驗策略。但是面對要將九張數字卡配置在九個代碼上，在沒有預先訂定每一邊數字和要配成多少（即目標數）的狀況下，即冒然憑著直覺進行調配，要想調配出「每一邊數字和都相等」的三角形數字圖，並非易事。難怪在十分鐘內，全班僅有幾位同學成功適配出一、兩種解，顯然大家都被卡住了！

（一）簡化問題

鑑於此，筆者乃藉機引介「簡化問題」策略，請學生暫時擱下原來的問題，改爲探究下列數字卡①~⑥配置問題，待全盤掌握新問題之解法後，再回頭解原問題。

數字卡①~⑥配置問題：

利用數字卡①~⑥配置於下圖之代碼A~E上，使三角形每一邊三個數字和都相等，宜如何配置？共有多少種不同的配置方式？



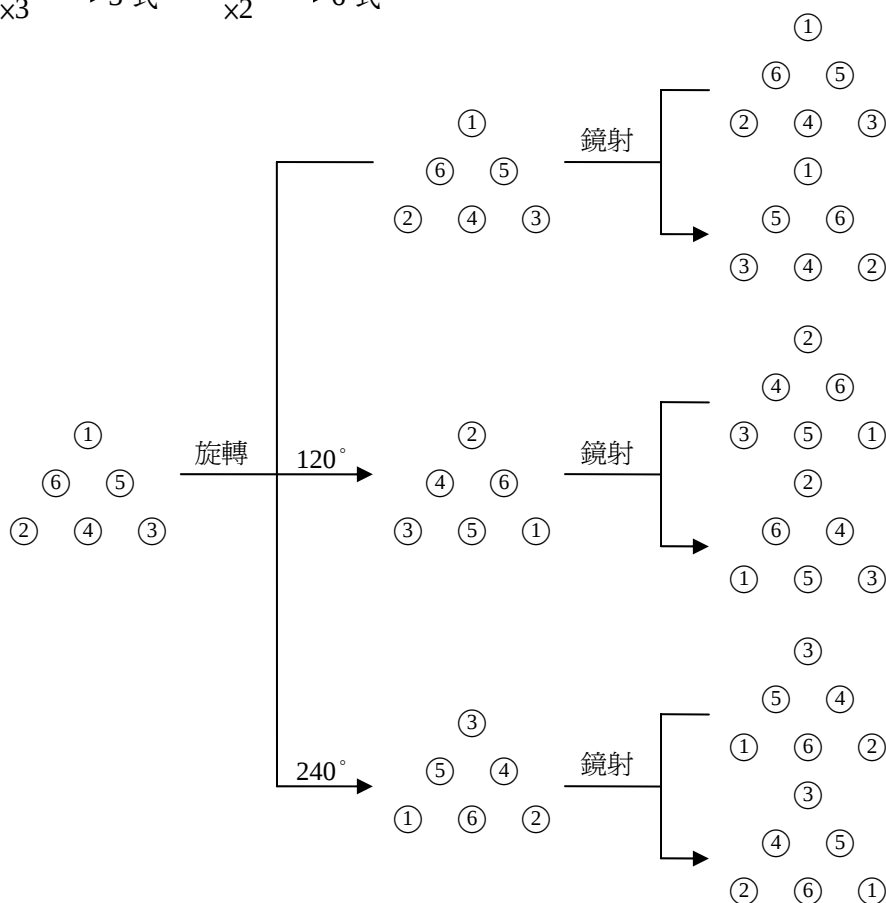
(二) 數字卡①~⑥配置問題之解題情形

1. 初步解題表現

由於簡化後的問題較簡易，因此，學生大多能在十分鐘內輕易的利用其「直覺的補償平衡」策略，即兩頂點數字和大(小)，介於其間的另一個數字就配小(大)，順利的配置出若干個合乎所求之解。

部份同學還進一步地發現，只要將一個解像圖二般，以三角形之中心點為圓心將三角形數字圖旋轉 120° 及 240° ，就可衍生出另兩種配置方式，即 1 式變成 3 式。然後，若在每一個三角形數字圖右端再置一面鏡子，又可鏡射出另一對稱於左端的三角形數字圖，即 1 式變 2 式，故一種配置方式經旋轉與鏡射之後，將可由 1 式變成 6 式，

即 1 式 $\xrightarrow[\times 3]{\text{旋轉}}$ 3 式 $\xrightarrow[\times 2]{\text{鏡射}}$ 6 式。



圖二：一式化六式之旋轉及鏡射變化歷程圖

解析：

學生雖能成功適配出若干個不同配置方式之三角形數字圖，也能發展出利用圖形旋轉與鏡射方式，將一種配置方式變化成六種不同的配置方式。然而，他們仍無法肯定且正確地回答出「共有多少種不同的配置方式」的問題。意味他們在動手配置卡片前，仍欠缺「預先設定每邊數字和之目標數範圍」的思考程序，僅聚焦於「如何調配數字卡置放位置，才能使每邊數字和都相等」，致憑其直覺的補償平衡策略，即動手解題。此作法顯然仍屬非系統性思考，當然無法確認自己是否已窮舉出所有可能的配置方式。

2.發展系統性的解題計劃

爲了協助學生窮舉「數字卡①~⑥配置問題」之所有可能的配置方式，筆者乃依序提出下列問題：

①您們所適配成功的三角形數字圖之每邊數字和是什麼？

※ 9, 10, 11, 12。

解析：

全班總共提出 9、10、11、12 等四種，筆者乃順勢請四位同學分別在黑板上列出其中一種，並定義這四個解爲「原型解」（因爲全班同學所適配成功的其它解，都可經由這四個原型解經旋轉或鏡射生成），這四個原型解如圖三。



圖三：數字卡①~⑥配置問題之四種原型解

②從數字卡①~⑥中任取三個合成的數字和，最小與最大的分別是什麼？它們分別由那三個數組成？

※ 最小的數字和 6，由（1,2,3）組成，最大的數字和是 15，由（4,5,6）組成。

③將組成和數最小與最大的數字組(1,2,3)與(4,5,6)之數字卡，分別置於三角形之Ⓐ、
 ㉔、㉕三個頂點上，再將其餘三張數字卡隨意置於Ⓑ、Ⓓ、Ⓔ上，則所形成的三角形
 數字圖，其每邊數字和的平均值，分別是多少？

※①~⑥之和是 21，再加三頂點數字一次，即表示三邊數字和之總和，故 $[21 + (1+2+3)] \div 3 = 9$ ， $[21 + (4+5+6)] \div 3 = 12$ ，即表示每邊數字和之平均值。

④能配置出每邊數字和之平均值為 8 或 13（不用考慮三邊數字和是否相等）的三角形數
 字圖嗎？10，11 呢？

※ 由問題③知最小和最大的平均值為 9 和 12，故 8 與 13 不可能發生，而 10 與 11 均介
 於 9 與 12 之間，當然有可能。

⑤能配置出每邊數字和之平均值為 10 與 11 之頂點數字組各有那些？

※ 每邊數字和之平均值 $\times 3$ 表示三邊數字和之總和 S ， $(S-21)$ 表示三頂點數字和，依此，
 $10 \times 3 - 21 = 9$ ， $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4$ ，所以能配置出每邊數字和之平均值為 10 的頂點
 數字組有 (1,2,6)、(1,3,5) 和 (2,3,4) 等三組；同理 $11 \times 3 - 21 = 12$ ，
 $12 = 1+5+6 = 2+4+6 = 3+4+5$ ，能配置出每邊數字和之平均值為 11 的頂點數字組有
 (1,5,6)、(2,4,6) 及 (3,4,5) 等三組。

⑥完成數字卡①~⑥配置問題之配置計劃表

表一：數字卡①~⑥配置問題之配置計劃表

每邊數字和之平均值	9	10	11	12
適配的頂點數字組	(1,2,3)	(1,2,6) (1,3,5) (2,3,4)	(1,5,6) (2,4,6) (3,4,5)	(4,5,6)

⑦表一中每一頂點數字組都可適配出「每邊數字和之平均值為 9 (10,11,12)」之三角形
 數字圖，它們也都可以適配出「每邊數字和都等於 9 (10,11,12)」之三角形數字圖嗎？

※ 起初有人認為可以，有人認為不可。經一番討論之後，大家都能了解「每邊數字和之
 平均值為 a 」之三角形數字圖，未必符合「每邊數字和都等於 a 」之條件，但「每邊
 數字和都等於 a 」之三角形數字圖，一定滿足「每邊數字和之平均值為 a 」之條件。
 故能適配出「每邊數字和之平均值為 a 」之三角形數字圖的頂點數字組，未必能適配

出「每邊數字和都等於 a 」之三角形數字圖。亦即表一中各頂點數字組，都只是適配出「每邊數字和都等於 9 (10,11,12)」之必要條件而已，而非充分條件。

⑧在數字卡①~⑥配置問題中，您們之前所成功適配出的三角形數字圖，其頂點數字組都出現在表一中嗎？

※ 經確認後，學生都認同所有能夠適配出「每邊數字和都相等」的頂點數字組，都會出現在表一中。

解析：

提問②~⑥旨在引導學生系統性探索「頂點數字組」與「每邊數字和之平均值」的關係、能適配的平均值範圍，進而統整列出一個系統性的配置計劃（如表一）。

提問⑦~⑧係從集合與邏輯觀點切入，引導學生區辨「每邊數字和之平均值為 a 」之三角形數字圖與「每邊數字和都等於 a 」之三角形數字圖的集合包含關係，並了解將表一中所列每一頂點數字組，配置於三角形之三頂點Ⓐ、Ⓒ、Ⓔ上，並無法確保能成功適配出「每邊數字和都相等」之三角形數字圖，但所有每邊數字和都相等之三角形數字圖，其頂點數字組必然會出現在表一中。進而了解欲窮舉出數字卡配置問題的所有原型解，必須先系統性的建構出如表一的配置計劃。

3.執行表一之配置計劃

學生參照表一所列資料，依所設定之「每邊數字和之平均值（即目標數）」，由 9~12，逐一將其對應之頂點數字組中的三個數字，先置於三角形三頂點之Ⓐ、Ⓒ、Ⓔ上，利用剩下的三張數字卡，在Ⓑ、Ⓓ、Ⓕ三個位置進行調配，期能配置出「每邊數字和都等於 9 (10,11,12)」之三角形數字圖。結果顯示：

- ①. 每邊數字和之平均值（即目標數）為 10 與 11 時，其對應的頂點數字組，雖然都各有三組，但實際調配後，都各有兩組（目標數 10 有 (1,2,6) 及 (2,3,4) 兩組，目標數 11 有 (1,5,6) 及 (3,4,5)）無法適配成功。
- ②. 目標數 9~12 都恰有一組頂點數字組適配成功。
- ③. 每一適配成功的頂點數字組，都僅能建構出一個原型解（如圖二）。

解析：

要求學生執行表一之配置計劃，旨在窮舉出數字卡①~⑥配置問題之所有原型解，並驗證之前有關「表一中每一頂點數字組都只是適配成功的必要條件，而非充分條件」的研討所得。

4.回顧與聯想

為使學生能正確且肯定地說出「數字卡①~⑥配置問題」共有多少種不同之配置方式，並將其所發展之系統性解法遷移至「數字卡①~⑨配置問題」上，筆者再度提出下列問題，引導學生進行數字卡①~⑥配置問題的解題歷程回顧與聯想。

- ①. 在數字卡①~⑥配置問題中，宜如何設定每邊數字和之平均值（即目標數）的範圍？如何推算對應於每一目標數的所有頂點數字組？
- ②. 為何有些對應於目標數的頂點數字組，仍無法配置出「三邊數字和都相等」的三角形數字圖？
- ③. 數字卡①~⑥配置問題有幾個「原型解」？
- ④. 在數字卡①~⑥配置問題中，每一原型解經旋轉與鏡射之後，可以變化成幾種不同的配置方式？
- ⑤. 數字卡①~⑥配置問題共有多少種不同的配置方式？
- ⑥. 數字卡①~⑨配置問題類似數字卡①~⑥配置問題嗎？解決數字卡①~⑥配置問題的方法，也可以使用在數字卡①~⑨配置問題上嗎？

5.建構數字卡①~⑨配置問題之配置計劃

經回顧數字卡①~⑥配置問題之解題歷程與比對數字卡①~⑨配置問題 vs. ①~⑥配置問題之結構後，學生都能了解到想完整且有效解決數字卡①~⑨配置問題，必先推算出「每邊數字和之平均值（即目標數）的範圍」及其對應的所有「頂點數字組」，並仿表一的型式，整理成表二。

表二：數字卡①~⑨配置問題之解題計劃

每邊數字和之平均值（目標數）	17	18	19	20	21	22	23
頂點數字組	(1,2,3)	(1,2,6) (1,3,5) (2,3,4)	(1,2,9) (1,3,8) (1,4,7) (1,5,6) (2,3,7) (2,4,6) (3,4,5)	(1,5,9) (1,6,8) (2,4,9) (2,5,8) (2,6,7) (3,4,8) (3,5,7) (4,5,6)	(1,8,9) (2,7,9) (3,6,9) (3,7,8) (4,6,8) (5,6,7)	(4,8,9) (5,7,9) (6,7,8)	(7,8,9)

解析：

表二之建構方法如下：

由 1~9 的和 45、頂點數字和最小的數字組 (1,2,3) 及最大的數字組 (7,8,9)，可推知每邊數字和之平均值（目標數）的下限是 $[45 + (1+2+3)] \div 3 = 17$ ，上限是 $[45 + (7+8+9)] \div 3 = 23$ 。因此，目標數的範圍是 17~23。

對應目標數 18 的所有頂點數字組之推算程序如下：

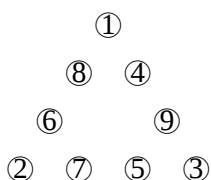
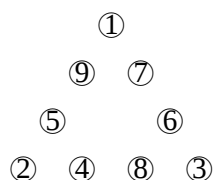
$18 \times 3 - 45 = 9$ ， $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4$ ，所以 (1,2,6)、(1,3,5) 及 (2,3,4) 等即為目標數 18 所對應的所有頂點數字組。以此推算，可得其它目標數之所有頂點數字組。

三.執行計劃

(一)窮舉所有原型解

各解題小組成員參照表二資料，分工合作進行「數字卡①~⑨配置問題」之配置工作，其結果如下：

1. 每邊數字和都等於 17

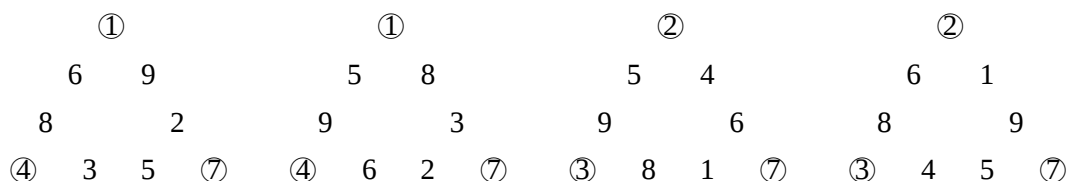


※唯一的頂點數字組（1,2,3）適配出兩種原型解。

2. 每邊數字和都是 18

※所有頂點數字組（1,2,6）、（1,3,5）及（2,3,4）都無法適配成功。

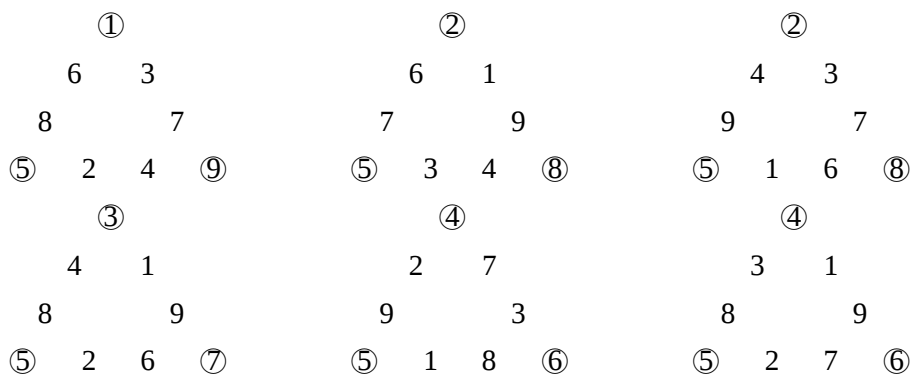
3. 每邊數字和都等於 19



※ ①頂點數字組（1,4,7）、（2,3,7）均可適配出兩個原型解。

②頂點數字組（1,2,9）、（1,3,8）、（1,5,6）、（2,4,6）及（3,4,5）都無法適配成功。

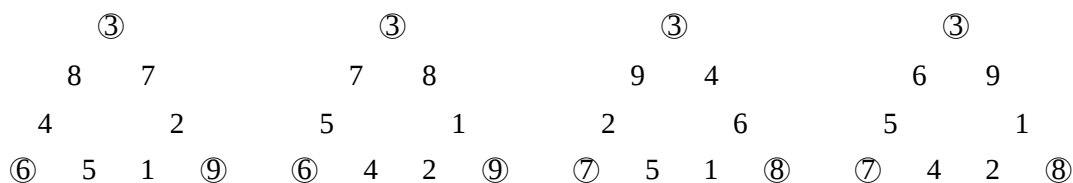
4. 每邊數字和都等於 20



※ ①頂點數字組（1,5,9）與（3,5,7）都僅適配出一個原型解，另（2,5,8）與（4,5,6）都能適配出兩個原型解。

②頂點數字組（1,6,8）、（2,4,9）、（2,6,7）及（3,4,8）都無法適配成功。

5. 每邊數字和都等於 21



※ ①頂點數字組 (3,6,9) 及 (3,7,8) 均可適配出兩個原型解。

②頂點數字組 (1,8,9)、(2,7,9)、(4,6,8) 及 (5,6,7) 都無法適配成功。

6. 每邊數字和都是 22

※所有頂點數字組 (4,8,9)、(5,7,9)、(6,7,8) 都無法適配成功。

7. 每邊數字和都等於 23



※唯一頂點數字組 (7,8,9) 可適配出兩個原型解。

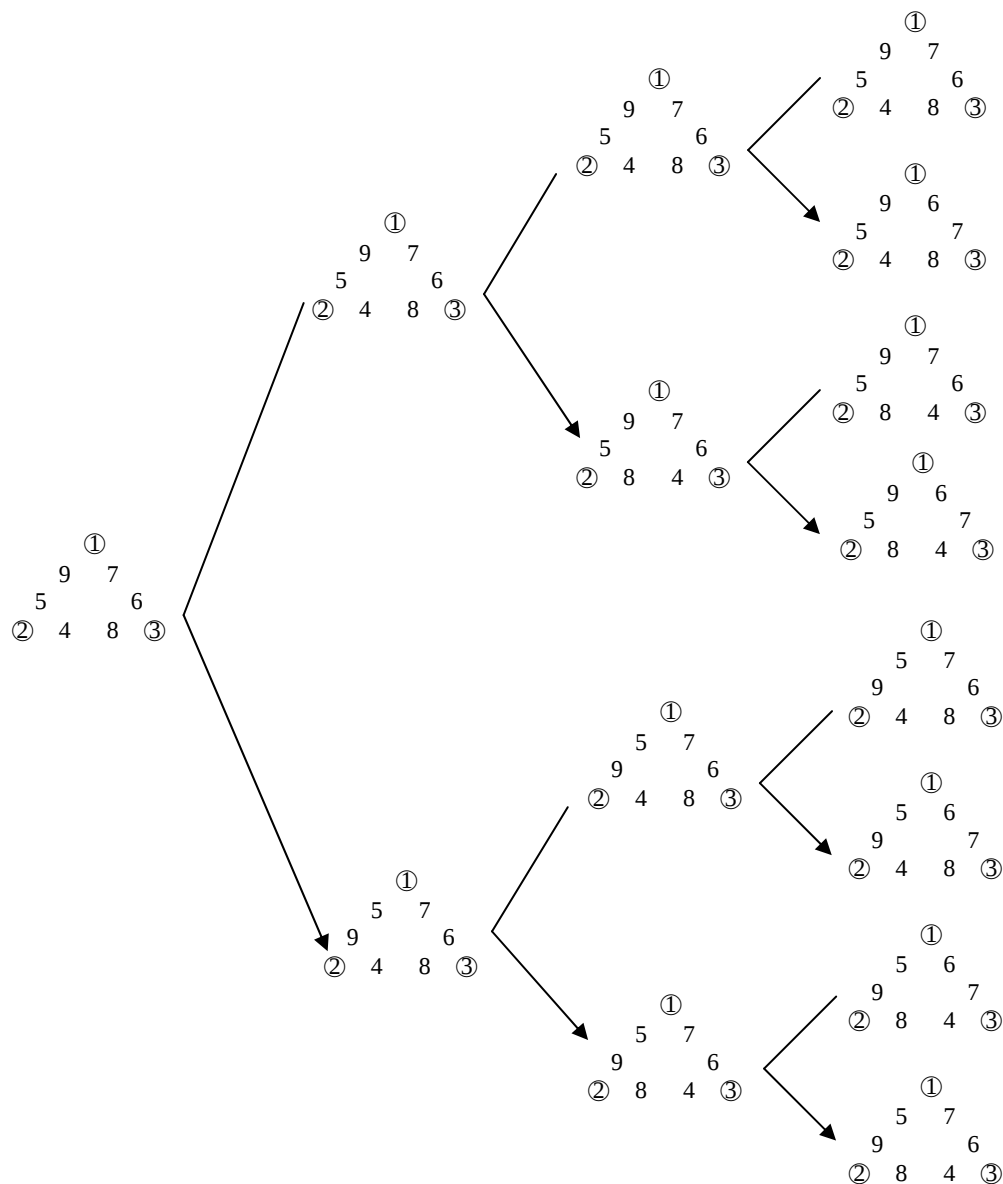
(二) 由原型解推衍其它配置方式

調配出所有原型解之後，學生也都能應用之前所發展之旋轉與鏡射作法，推理出每一原型解可變化成 6 種不同配置方式，即一原型解 $\xrightarrow[\times 3]{\text{旋轉}}$ 3 $\xrightarrow[\times 2]{\text{鏡射}}$ 6 種不同配置方式。然而，這兒每一適配成功的三角形數字圖與圖一不同，前者每一邊介於兩頂點之間的數字有 2 個，不同於圖一只有一個，故筆者再度提示下列問題，期能促使學生發展出「互換位置」之策略，藉以衍生出另類配置方式。

1. 在數字卡①~⑨配置問題中，每一適配成功的三角形數字圖，其每一邊介於兩頂點之間的數字均有幾個？
2. 一個適配成功的三角形數字圖，除了可經由旋轉與鏡射變化成 6 種不同的配置方式外，是否還可再經由其它方式來衍生出另類的配置方式？

解析：

學生經上述問題討論後，又發現當三頂點數字固定時，將同一邊介於兩頂點之間的兩個數字互換位置，也可衍生出另一種新的配置方式。若三邊依序進行互換位置，將可由一種變化成 8 種不同的配置方式，其衍生系列圖之示例如下：



圖三：三角形數字圖之換位系列變化圖

四.回顧與聯想

(一) 回顧主要解題歷程

關於數字卡①~⑨配置問題，雖然學生已能推算出總共有 864 種不同配置方式。但是僅經歷此一解題經驗，若沒有系統性回顧其重要解題歷程的配合，仍不足於內化其解題中所發展之數學思考知能。

因此，筆者乃提出如下的問題：

1. 開始解數字卡①~⑨配置問題時，被卡住的主要原因是什麼？被卡住後，老師為何要大家改為解決數字卡①~⑥配置問題？
2. 如何擬定出解決數字卡①~⑨配置問題的配置計劃表（即表二）？如何執行此一配置計劃，以窮舉出所有原型解？
3. 為何配置計劃表中有些頂點數字組無法成功適配出「每邊數字和都相等」之三角形數字圖？
4. 一原型解如何經由圖形旋轉、鏡射及各邊介於兩頂點數字之間的兩個數字互換位置，衍生出其它不同的解？

(二) 統整解題結果

數字卡①~⑨配置問題雖有 864 種解，但實際上只是由 18 個原型解，經由旋轉、鏡射及介於兩頂點之間的兩個數字互換位置變化所生成（1 式→48 式），足見建構出這 18 個原型解，才是解題關鍵。然而，由上述的解題過程可知，要建構這 18 個原型解，可不是容易之事。

「化繁為簡」是數學的本質之一。因此，進一步引導學生試著去探索建構這 18 個原型解的捷思法，是值得進行之事。為了探索建構這 18 個原型解之捷思法，筆者乃採逆向思考提出下列問題，引發學生從統整這 18 個已完成的原型解著手，期能從中分析出牢記或建構這 18 個原型解之捷思法。

1. 在已完成的 18 個原型解中，每邊數字和都是 17,18,19,20,21,22,23 的原型解各有幾個？適配的頂點數字組分別是什麼？請將討論結果整理成表四。

表四：數字卡①~⑨配置問題之原型解個數分佈表

每一邊數字和	17	18	19	20	21	22	23
原型解個數							
適配的頂點數字組							

※ 完成後表四資料如下：

每一邊數字和	17	18	19	20	21	22	23
原型解個數	2	0	4	6	4	0	2
適配的頂點數字組	(1,2,3)		(1,4,7) (2,3,7)	(1,5,9) (2,5,8) (3,5,7) (4,5,6)	(3,6,9) (3,7,8)		(7,8,9)

2. 表四中每邊數字和 17~23 之原型解個數的分佈情形有什麼特色？如何巧妙地牢記表四之第一、二列之資料之對應關係呢？

※ 學生都能輕易地看出每邊數字和 17~23 之原型解個數分佈呈對稱分配，故只要記出 17~20 之原型解個數，就可推知 21~23 的原型解個數。

3. 表四中十組適配的頂點數字組，僅出現一個原型解的是那幾組？其餘各有幾個原型解？

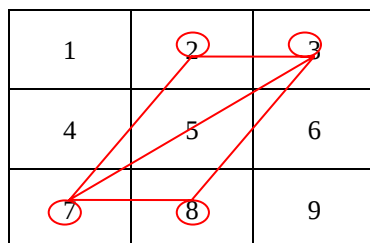
※ 僅出現一個原型解的是適配於每邊數字和 20 的 (1,5,9) 及 (3,5,7)。其它 8 組頂點數字組都有 2 個原型解。

4. 如何巧妙地牢記這十組適配的頂點數字組？

※ 有一組學生奇蹟地看出這十組適配於所有原型解的頂點數字組，除了 (2,3,7) 及 (3,7,8) 外，其它 8 組 $\boxed{(1,2,3) \cdot (4,5,6) \cdot (7,8,9)}$ ， $\boxed{(1,4,7) \cdot (2,5,8) \cdot (3,6,9)}$ 及 $\boxed{(1,5,9) \cdot (3,5,7)}$ ，正好依序對應到圖四之九宮格中的三橫列、三直行及兩對角線上的三個數字所形成的數字組，故可將這 8 組頂點數字組表徵在九宮格上。

鑑於九宮格之妙用，因此如何把 (2,3,7) 及 (3,7,8) 也表徵於其中，自然就成為大家討論的焦點。由於 3 與 7 是兩組頂點數字組共有之數字，故最後大家決議：在九宮格

中畫出兩個共邊（由數字 3 與 7 為頂點）的全等三角形，來表徵這兩組頂點數字組。至此總算可把適配出所有原型解的頂點數字組表徵於圖四上。



圖四：數字卡①~⑨配置問題之所有原型解的頂點數字組表徵圖

5. 圖四中僅有一個原型解的數字組在那裡？

※ 兩條對角線上

（三）總結—窮舉數字卡①~⑨配置問題之原型解的捷思程序

由於圖四之九宮格具有表徵十組「建構 18 個原型解」的頂點數字組之功能，故筆者乃結合此一功能，會同學生總結出下列解決數字卡①~⑨配置問題之原型解的捷思程序。

窮舉數字卡①~⑨配置問題之原型解捷思程序：

1. 畫出圖四之九宮格圖及 18 個待配置之三角形（如圖一）。
2. 以九宮格上每一列（行、對角線）上三個數字及兩個共同邊之三角形的三頂點數字等十組數字組，逐一配置於三角形（如圖一）的頂點Ⓐ、Ⓓ、Ⓖ上（註：配置時，依數字小→中→大，對應配置於Ⓐ→Ⓓ→Ⓖ上）。惟，其中除了兩對角線上的數字組（1,5,9）及（3,5,7）外，其它 8 組數字組均需以同樣的方式配置在另一個三角形上（表示它可建構 2 個原型解，如此才有 $1 \times 2 + 2 \times 8 = 18$ 組原型解）。
3. 推算對應的每邊數字和。

$$\text{每邊數字和} = (\text{三頂點數字和} + 45) \div 3$$

$$= \text{三頂點數字之平均值} + 15$$

※ 以九宮格第二列（4,5,6）為頂點數字組時，其對應的每邊數字和應為 $5 + 15 = 20$ 。

4. 配置Ⓑ、Ⓒ

①推算適配的Ⓑ與Ⓒ之和

每邊數字和－Ⓐ及Ⓓ兩頂點數字＝Ⓑ與Ⓒ之和

②從剩下的六張數字卡中，搜尋出符合Ⓑ＋Ⓒ的數字組，其中較小的數字配置於Ⓑ，較大者配置於Ⓒ。若符合Ⓑ與Ⓒ的數字組有兩組，則將其分別置於具有相同Ⓐ、Ⓓ、Ⓔ之數字的三角形上。

5. 配置Ⓔ、Ⓕ

仿配置Ⓑ、Ⓒ的作法，在每一Ⓐ、Ⓑ、Ⓒ、Ⓓ、Ⓔ上已被配置數字卡之三角形，必定恰好可找出一組符合Ⓔ、Ⓕ的數字組。

6. 配置Ⓖ、Ⓘ

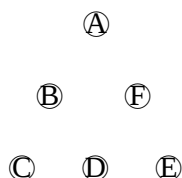
將剩下的兩張數字卡，小數置於Ⓖ，大數置於Ⓘ，則此一三角形必符合三邊數字和都相等之條件，亦即就形成一個該頂點數字組之原型解。

（四）聯想

成功解題之後，能聯想出相關延伸性問題再解題是成為解題高手必備之要件。故筆者再以下列問題來引導學生，期能養成其聯想之習慣。

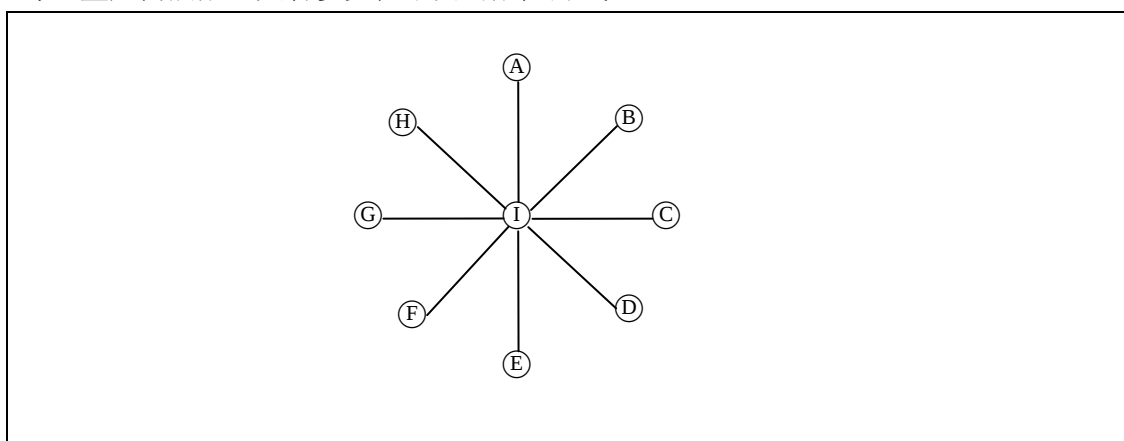
1. 在數字卡的配置活動中，數字卡張數與三角形上的代碼數都一樣多。我們也討論過當數字卡張數少於代碼數時，根本是無解。反之，當數字卡張數多於代碼數時，也是無解嗎？或是有更多的解？試著再探討下面的問題：

利用數字卡①~⑦配置於下圖之代碼Ⓐ~Ⓔ上，使三角形每一邊三個數字和都相等，宜如何配置？共有多少種不同的配置方式？



2. 在數字卡①~⑨的配置活動中，我們都在三角形上操弄，其中有 3 個頂點數字被兩邊共用，且求解目的旨在使三邊數字和都相等。如果改在其它圖形上操弄，原來的解法也可以適用嗎？試著再解下面的問題。

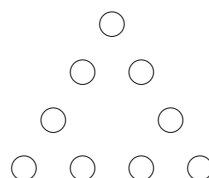
利用數字卡①~⑨配置於下圖之代碼A~I上，使得每一直線上三個數字之和都相等。宜如何調配？共有多少種不同的配置方式？



肆、結語

一般趣味數學的書上，有關數字卡①~⑨配置問題都是在給定一個目標數的前提下，要求解題者調配出一個「每邊數字和都等於這個目標數」的三角形數字圖，也不要求進一步探討有多少種不同的配置方式（如下）。如此陽春，解題者通常都僅訴諸於直覺的猜測與檢驗，適配出一種合乎條件之解，即結束解題作業。

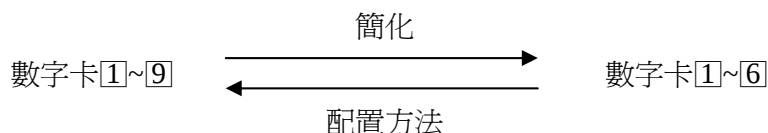
將數字卡①~⑨配置於右圖之九個○上，使得三角形每邊數字和都等於 17。



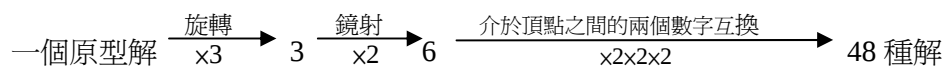
鑑於上述問題過於簡化，不易激發職前教師深入思考，筆者乃將其改編成本文所探討之問題（如圖一）。經由上述有關主要解題歷程之回顧與解析，顯示改編後的問題，具

有如下之特性：

1. 發展「被問題卡住可簡化問題的策略」。



2. 可訓練學生養成理解題意及系統性思考的良好解題習慣。
3. 連結幾何圖形之旋轉、鏡射概念與機率統計中的排列組合及乘法原理，將一原型解變化成 48 種不同之解。



4. 連結集合、邏輯概念，探討有些頂點數字組無法適配成功之原因。
5. 從統整解題成果逆向探索解題捷思法，奇蹟式的創造出能表徵所有原型解之頂點數字組的九宮格（參閱圖四）。
6. 問題具有延伸性，可做為訓練學生解題之後聯想相關問題之好題材。

所以，筆者深信此一數字卡[1]~[9]配置問題，的確是一個啟發職前教師數學思考力與培養良好解題習慣之優質問題。