

教與學軌道和多元解題策略：以三年級學童整數 的加減計算為例

林月芳
屏東縣瑞光國小教師

陳嘉皇
崑山科技大學教學發展中心助理教授

壹、前言

觀察數學課堂裡的活動，發現學生能夠成功解題，是需要配合對文本的理解、策略的運用、概念的溝通與連結等歷程，才能克竟其功。由於學生帶著不同的生活經驗與知識進入學習場域，因此，在教學的歷程上存著真實、多元且不同的教與學的軌道，這些教與學的軌道呈現出學生的背景經驗、文化刺激、心理狀況、學習風格、認知發展、知識結構等各種差異的面向，這些要素皆是學生學習成敗的重點，教師若能確切且有效的掌握這些教與學的軌道，進而理解學生使用解題策略的意義以及推理的模式，勢必能提昇數學教學的效能，協助學生達成學習的目標。

根據荷蘭數學教育學者 Freudenthal 的看法，數學必需與真實生活連結，緊密地支撐孩子的思維，並且和社會產生關聯，變成人類的一種崇尚至高的價值，不必然要將數學當成是必須傳遞的學科。Freudenthal 特別強調，要將數學視為是人類的活動，在教育上必需要給予學生「引導」的機會，藉由做數學而「重新發現」它。這種解釋，認為無需刻意的將數學教育的焦點當成是一種封閉的系統，而要自然地放在活動上，處在一種數學的歷程（Freudenthal, 1968）。受此理念的影響，Treffers（1978）則將呈現在教育情境上的數學，區分為「水平」和「垂直」兩種數學的類型，進一步深入說明。水平的數學，指的是學生在真實的生活情境，可以幫助其組織和解決問題所使用的數學工具；垂直的數學指的是在數學系統本身內重新組織的歷程。這樣的學習方式，才能夠協助學生發覺概念和策略之間的捷徑以及連結，然後加以應用。水平的數學是從生活的世界進入到符號的世界，而垂直的數學則是符號世界裡的變動。Freudenthal 強調這兩種數學的形式是等值的，所以我們要記住，數學是可以發生在不同的理解層次，而達到相同的學習目標。

藉由他的宣稱，可以明確的說，因為有不同層次的理解，所以學生在解題的歷程上就有不同的策略產出，因此教學現場上，本來就存在著多元的教、學軌道，這是教師不容否認，甚至不能藉由單一解題方式就可忽略的。

本文即藉由學童學習整數「直式計算」的歷程，誘導出相關的四則運算解題策略，說明在相同的教學目標情境下，學童透過其不同的認知、思考策略，證實教與學軌道的存在，並提出建議，落實教與學軌道此理論帶來的啟示，以增進教師專業發展，提升學生學習成就。

貳、教與學軌道的理解在教學情境上的重要性

Freudenthal（1983）認為數學教育必需要有一個重要的價值存在。一些研究分析已經證實了何種數學知識和技能值得學習，何種真實的現象可以提供做為發展想要的數學知識和理解的可能性，然而，最重要的是，教師們要嘗試去發現學生如何接觸這些現象，並試著呈現這些現象給學生。這意味著要有刺激、問題情境要被辨識，才能引導學生學習，並給予學生機會去發展數學的概念和策略。要具備刺激和引導學生學習的力量，就需要植基在「真實數學教育」所謂的一種縱的教與學的軌道。

一、教與學的軌道當成教學決策的架構

什麼是教與學的軌道？簡言之，就是描述學生在學習上所遵循的歷程。教與學的軌道有三個相互糾纏的意義：

- 1.教與學的軌道是對學生學習的歷程所給予的一般性綜覽。
- 2.教與學的軌道包含了教學的指示，描述如何教學才是最有效率，並能連結和刺激學習的歷程。
- 3.是種學科的輪廓，指出數學課程裡的何種要素是必須教導的。

雖然，教與學的軌道將學習的歷程加以按部就班的安排，但在同一時間裡，不能將它視為是一種線性的關係，或是單一步驟的規律，且每一個步驟都是必要，不能精簡，亦步亦趨而刻板的遵照下一步驟的指示。教學的軌道必需被視為具有一定的帶寬，而非單一的軌道而已。這種彈性與多樣的軌道特質，可從下列的描述加以強調：

- ◎ 個別學生學習的歷程。
- ◎ 學習歷程的間隔方面，學生有時會藉由跳躍和回彈而進步，而在其它時間則故態復萌。
- ◎ 多元的技巧可同時被學習的，而且不同的概念可在同一時間發展，這兩種可同時存在並外在於學科。
- ◎ 差異可出現在學校學習的歷程，也可以當成是學校外學習情境差異的結果。
- ◎ 孩子有不同層次特定精熟的技巧存在。

基於上述教學情境上的差異與特殊之處，教與學軌道的主要目的，企圖提供教師一種「心智教育的地圖」，幫助他們進行教學的決策。教與學軌道提供了一種後設層次的引導，綜覽學生學習歷程的進行，對學生理解的持續進步是非常重視的。若要對學生的協助和暗示做合適的決定，教師則需對教學目標有一良好的理念，可以引導學生在選擇新的問題時，針對可以通過的目標和標準，沿著路徑採取一種或它種方式。若教師在心思中沒有這些輪廓，那麼要去評價學生的策略，預測孩子的理解和技巧是否恰如其分，是很困難的。

教與學軌道在教育引導和支持決策等目標與傳統相較，可以發現教與學的軌道是種新穎的教育現象。

（一）此軌道不再是不同年級所有成就目標集合的組合，反而是種能力分割的檢核表：此種軌道使其在建構彼此間的連結時，顯得更加清楚，並有輕重緩急之分。

（二）它的成就目標和教學架構重疊：此軌道不僅描述學生學習的標準，而且能夠對每一個路徑加以辨識，類似教學中重要的活動一樣，可以引導執行這些標準。

（三）它既有的統整性，是以層次的差異作為基礎：這樣的描述使得在學生在某一階段，需要學習什麼物件變得更加清楚，而能理解，並在下一階段形成更高的層次。一種連結軌道裡的要素的循環模式，可以轉換到一種更高層次的形式，是學習歷程裡呈現的層次特徵，因為，可以將縱的統整性帶進學習和教學的軌道。而這個層次另一項重要的特徵是，在軌道上，學生可以理解不同層次的一些事物，也就是，他們可以進行相同問題的探究，但不需要相同的理解層次。

（四）可以選擇新的格式加以描述：此種描述並非簡單的技巧明細或能達到的啟示，

也不是一種嚴格的行為公式參數，可以直接檢測。反過來，它是一種概略性和敘事的描述，由許多例證而完成，藉由教學的歷程持續發展和發生。

教與學軌道內涵裡的連貫、標準、統整與描述的特質，將學生對某領域該學習的數學「大概念」透過軌道的順序預先呈現出來，形成一架構，裨益學生在合理的軌道上選擇運思而產生適宜的策略進行解題。以下則以三年級學童整數的運算例證加以說明，以明瞭教與學軌道如何在整數之加減直式計算上的運用。

二、針對整數直式計算的教與學軌道

對整數的計算而言，在教與學的軌道裡，「計算」此定義首先可以藉由一種廣泛的方式加以解釋，包含數字知識、數常識、心智算則、估算和四則運算。事實上，這個軌道所描述的方式意味著給予數字所有計算的元素，讓我們理解他們是如何關聯的。

圖 1 看到，整數計算方式的軌道劃分成低、高兩個年級，雖然這兩部分的教學歷程形成連續體，但不能忽略每一位學生有其自己的特徵，這可能源自於一種無法區別的數數和計算方式，後來在某些特殊種類問題裡，被教導運算某些數字而逐漸採取一種特殊的計算模式。在低年級裡，所有的數字活動可以藉由「數數」加以宣稱，而到較高的年級，就能加以區分成不同計算的形式，像（1）心算、（2）估算、（3）直式計算、（4）四則運算和（5）使用計算器等。

整數計算此軌道的第一項特徵是心算所扮演的重要角色，它被視為是種精細的算術作業，以低年級作為根基，以較高年級做為骨架。第二項特徵是此軌道明確的將注意力放在數字和數字的關係，這個理念認為：對計算而言，如果學生熟悉數字的情境，對數字的知識知道越多，並能透過大規模和內在結構的組織，而讓一種重要的功能安置下來，那麼問題就會變得更容易，在不同的情境，就可以專注其內並運作，所以學習就可游刃有餘。

第三項特徵則強調對估算學習的教導，雖然估算被當成數學教育裡一項重要的目標，但大部分教科書的內容是缺乏如何學習估算的，有的話，也僅包含一些簡易估算的問題，隨機處理而已，無法對估算的進行提供充分的理解，而且對何者可能和何者是無法估算的時刻，是不充足的。第四項的特徵是算則和一種較為省略的算則之間產生的方法差異，讓所處理的整數不再依靠數字計數，此種方法稱之為「直式計算」。

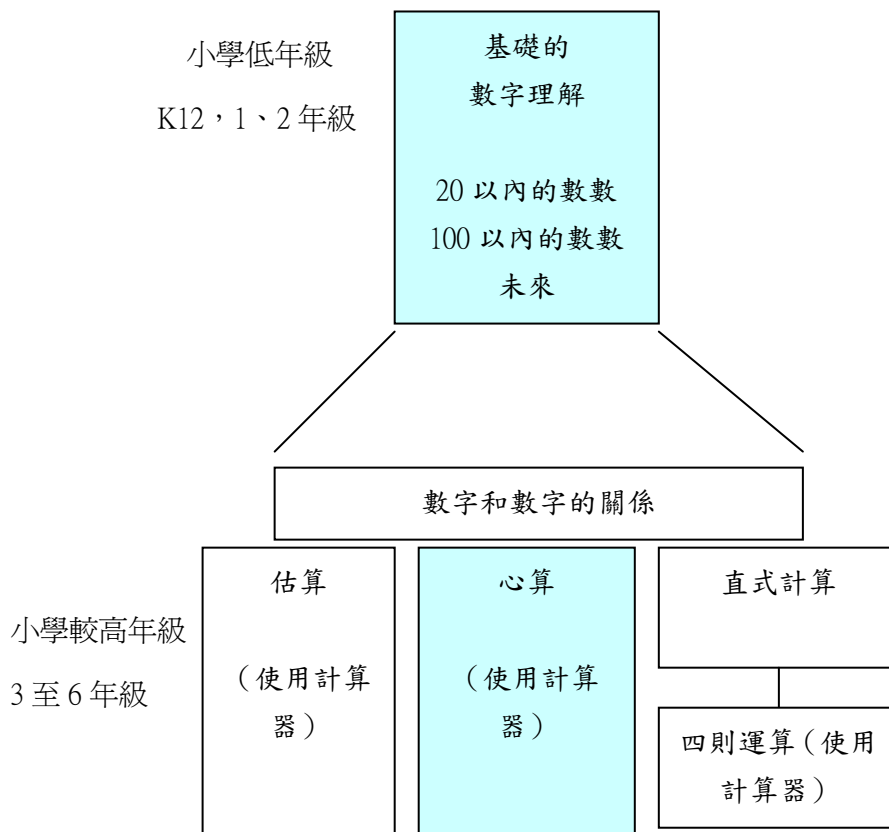


圖 1 整數計算的教與學的軌道

在整數計算的軌道裡，學生不同層次的理解，會因教材與師生的互動，採取估算、心算、直式計算等策略進行解題，這些策略的呈現可以讓教室裡的師生進行比較、分析、辯解，透過發現數學的方式，學習到數學必要的概念和解題的策略，這對數學課堂的教和學而言，是非常重要的。

參、多元解題策略之例證

在此，以三年級學童之四位數整數的加減計算為例，說明計算策略的運作，透過多元解題策略產出的分析，以詮釋教與學軌道和多元解題策略之關係，作為此論述的基礎。

一、整數加法的解題策略

從學生先前的經驗加以分析，三年級的學童已經具備二位數整數加減的經驗，並擁有進位和退位的概念、技巧。此活動的目標，在於教導學生熟練四位數整數加減法直式記錄的方法，重點在於學生能夠利用進、退位而正確的計算出答案。首先，教師提取學生舊有經驗後，接著佈題，鼓勵學生討論、溝通，並做紀錄。以下呈現問題及學生的表現：

問題一：君君存了 3806 元，如果他再存 1899 元，就會和哥哥存的一樣多，哥哥存了多少元。

(1) 教學目標

(2) 位值計算

(3) 填補計算

(4) 和差算法

小柔的方法

$$\begin{array}{r} \\ 3806 \\ + 1899 \\ \hline 5705 \end{array}$$

小領的方法

$$\begin{array}{r} 3806 \\ + 1899 \\ \hline 4000 \\ 1600 \\ \hline 5600 \\ 105 \\ \hline 5705 \end{array}$$

小佑的方法

將 3806 拿出 1 給 1899 變成 1900，剩下 3805，再拿出 100 給 1900 等於 2000，剩下 3705，全部加起來是 5705

小逸的方法

$$\begin{aligned} 3806 + 1899 &= (3800 + 6) + (1900 - 1) \\ &= 5700 + (6 - 1) \\ &= 5700 + 5 \\ &= 5705 \end{aligned}$$

從整理的資料，可以發現，同樣是加法的問題，教學目標皆是採用直式計算解題(1)，由於學生理解的層次不同，使用的解題策略很明顯的呈現出差異，但是其內涵依然保有直式計算的概念和技巧，只是運用的時機和關鍵點不同(2, 3, 4)，若將它予以層次的排列，亦能發現此問題所欲達成的數學目標，實際上呈現一種概念的連續體，即呈現出縱的教學軌道，這些多元解題策略(四則運算中的加減運用)在課堂上加以比較、對照、分析，能協助學生理解整數直式計算的方式與技巧，獲取正確的計算答案。

二、整數減法的解題策略

另外在整數的減法問題上，學生也呈現出多元解題策略的現象

問題二：圖書館有文字書 6321 本，圖畫書比文字書少 1588 本，圖畫書有多少本？

此問題的教學目標亦是利用直式計算解題（1），這些表徵是個別學生的解題策略，不同的層次有孩子特定精熟的技巧存在，當把這些不同的策略（2，3，4）同時呈現在黑板上，彼此的差異經由學生之間的辯解、說明後，可以尋找出整數連續退位的同構，理解學習軌道上所處的點，而發現適合自己認知層次的直式計算解題方式，教師亦能將學生這些表現整理計畫成教學的重點與方向，提供學生數學概念發展的結構與可能的策略，安排做數學的活動，讓學生有機會享受學習數學的樂趣。

(1) 教學目標

(2) 位値計算

(3) 分割計算

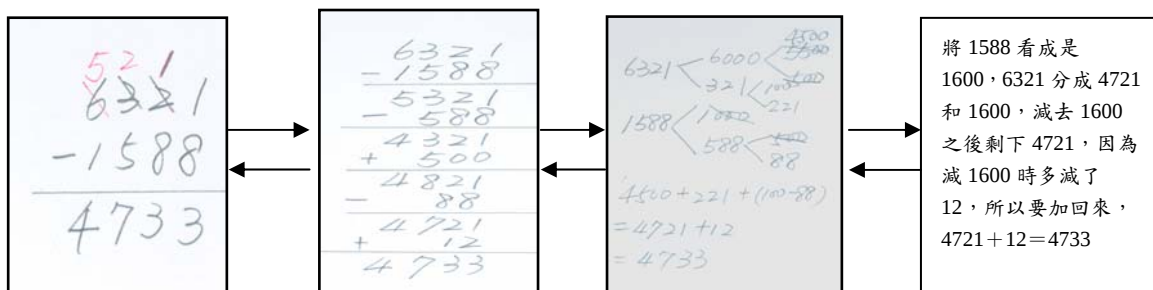
(4) 和差算法

小維的方法

小芳的方法

小佑的方法

小逸的方法



肆、教學軌道多元解題策略實施困境之探究與改進

一、數學知識不足

對於長久以來習慣接受單一標準答案的教師而言，多元解題策略在數學課堂的實施是有其困難的。根據 Silver 等人（2005）針對一項教師專業成長研究的總結報告顯示，教師在課堂裡實施多元解題，常知覺到許多障礙，其中一項限制是關於教師所具備的數學知識是不足的。Silver 建議教師要擴充其專業知識，應從以下幾方面加以思考並改進：

1.教師的數學知識以及他將學生視為是數學學習者的知識，是與教師在橫跨整個教學歷程中，採用多元解題所選的教學方法彼此交互作用的。這種交互作用產生於教師透過解決數學問題，以及嘗試預期的解題策略，和學生常發生的可能錯誤而準備教材時。

2.數學知識包含教師能夠敏銳、小心的監控學生作業，很快地理解其作業上所呈現的方法，並辨識這些特殊策略、表徵以及其他的數學概念的數學價值，也就是選擇任何可以呈現出的解題方法。

3.這種知識也包括，當教師進行順序的企圖性選擇時，需讓學生能夠分享彼此的工作，嘗試幫助學生做不同方法之間的連結，以便達成其數學教學有關課程的目標。

二、重新規劃數學知識資源

爲了要提升學生在複雜的教室情境下，面對包含的多元解題方法的學習，老師應該要「重新規劃」(re-purposing)自己的數學知識，以便能夠提供資源(Ball, 2001)。「重新規劃」可以從教師對學生的思考、作業及言說行爲的敏銳觀察和積極回應獲得啓示：

1.重新規劃數學知識要求教師需具備顯著的、彈性的內容，和學生思考等有關作業的挑戰，若沒有上述這些要求，教師就不可能有效的安排學生解題的序列，這可從呈現某種解題策略，不管是聰慧的解題方法、錯誤的概念時，教師會覺得手足無措而瞭解；

2.教師若具備這些要求，則在討論錯誤時，他們會明瞭整個問題型式的複雜性，以及需要去橫跨的知識深度，這些議題需要彈性的使用數學知識，去梳理植基於孩子數學作業中的重要的結構、表徵和概念。如果教師缺乏明顯、彈性的數學和學生思考的知識，那麼他們會傾向於經由一種「呈現－告知」(show-tell)練習的慣例，來管理多元解題的策略，允許他們避免選擇特定方法的複雜性，直接安排他們採用一種有順序，而連結到外在且重要的數學觀點上，但很明顯的，這是不足的。

3.影響多元解題策略進行的其他重要因素，尚包括教學時間的限制，限制與規定學生能力的概念，以致學生缺乏機會去發展與一些實務上創新教學有關的教學程序。要克服這些障礙，教師需要接觸一些資源以及增進經驗，藉由學生典型反應的提供，和可能建議的觀點，可以提供課程材料一些協助，但在大多數的範例中，可以發現教師是無法顯現出可能出現在教室課堂上的完全範圍，因此教師也需要其他種類專業學習的機會。

三、鼓勵教師正面的轉化

我們相信在教師的實務中有某種轉變，即未來可藉由課堂計畫的資料和專業發展中的對話所獲得的證據而增強。一些資料指出教師在閱讀、分析以及討論例證所產出的一些啓示，可以提供他們去模塑教學。從學生思考及操作歷程獲得的教與學軌道，可以促進教師在專業上的省思與發展，正面提升教學的效能，並獲致以下結果：

1.這些專業發展的計畫可以幫助教師思考如何使用多元解題的概念，在教學中運用以維持作業的認知要求。較特殊的是，教師課堂的計畫在其鷹架策略範圍的思考，會變的有越來越多細微的差異，但可以用來支持學生參與複雜的教學作業上。

2.教師對於預期學生的思考會越來越明確：學生可能會使用的策略及可以預測的錯誤概念，並計畫合適的方式去運用在教室課堂裡所期待的學生的思考。

3.教師會有兩種轉變，一種轉變或許會將使用多元解題策略視為是一種空洞的概念，只是一種牽涉到教學改革的口號，他會認為使用此種方式會造成教學上更加複雜、存在更多的差異；第二種轉變是，教師會針對學生如何在教室裡思考此種方式而發展出一種更完整、複雜的理解，進而用來促進其在課堂有關的數學教學目標。

4.經由專業發展的訓練，在教學中，教師可以進一步辨識出五種重要的要素：

- (1) 思考學生會運用的進一步可能的解題方法。
- (2) 在作業執行中，會仔細思考學生的解題方法。
- (3) 會從可能的方法中選擇具有最大利益的方法。
- (4) 決定不同解題方法呈現的順序。
- (5) 藉由比較和對照不同的解題策略而發展學生的理解。

使用多元解題的策略允許教師思考教學實務的觀點，如何被用來促進其數學教學的目標，除了此價值外，亦可允許學生看見對某問題的多元解題，可以當成對其他同學研究和解決未來問題有關策略辯論的手段，並檢驗一些學生傾向使用非標準或不正常的方法的思考。當教師開始思考關於課堂的數學目標，有目的性的選擇以及解題策略的組合時，他們能夠採用新的觀點看見此種教學的實務。從這樣的觀點來看，多元解題策略的呈現，和不同方法之間連結的思考，可以視為是促進數學議題的機會。

參考資料

Ball, D. L. (2001). Teaching with respect to mathematics and students. In T. Wood, B. S. Nelson & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 11-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1983) . *Didactical Fenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Treffers, A. (1978) . *Wiskobas doelgericht* 【Wiskobas goal-directed】 . Utrecht:IOWO.

Silver, E. A., Mills, V., Castro, A., Ghouseini, H., & Stylianides, G. (2005, May). Mathematics teacher professional development: Integrating case analysis and lesson study in the BI:FOCAL project.” Paper prepared for ICMI 15: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, (Aguas de Lindoia, Brazil) . Available from http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html/