

從達文西的名畫學數學

—藝術與人文領域融入數學「平行與對稱」教學活動設計

王瑞慶

國立屏東教育大學 數理教育研究所研究生

壹、教學設計理念

一、動機

根據九年一貫課程綱要（教育部，2003）數學學習領域的基本理念所指示，「教育應提供學生做有意義及有效率學習的機會，使學生能學好重要的核心數學題材，因為這些重要的數學概念和精熟的演算能力，是九年一貫所強調『帶著走』的能力。」及「學生要能將數學應用在日常生活中，學習欣賞數學、從而發展探究數學以及與數學相關學科的興趣。」換句話說，「帶著走的能力」及「生活化」突顯出現階段數學教育所應努力的目標。然而環顧目前所有的數學教材中，雖然力求活潑化，但對於學生的數學概念學習仍然停在扁平又狹窄的數學知識灌輸上。

由於高年級所學的數學內容偏向抽象的運思概念，想要落實在日常生活中或具體化不是一件容易的事。因此在教材設計單元的選擇上，研究者認為，幾何概念的學習，尤其在小學的階段，只要教育資源的充足，可以盡情的與生活結合，並豐富幾何教材的內容，同時達到九年一貫的精神與理念（謝堅等人，2002）。

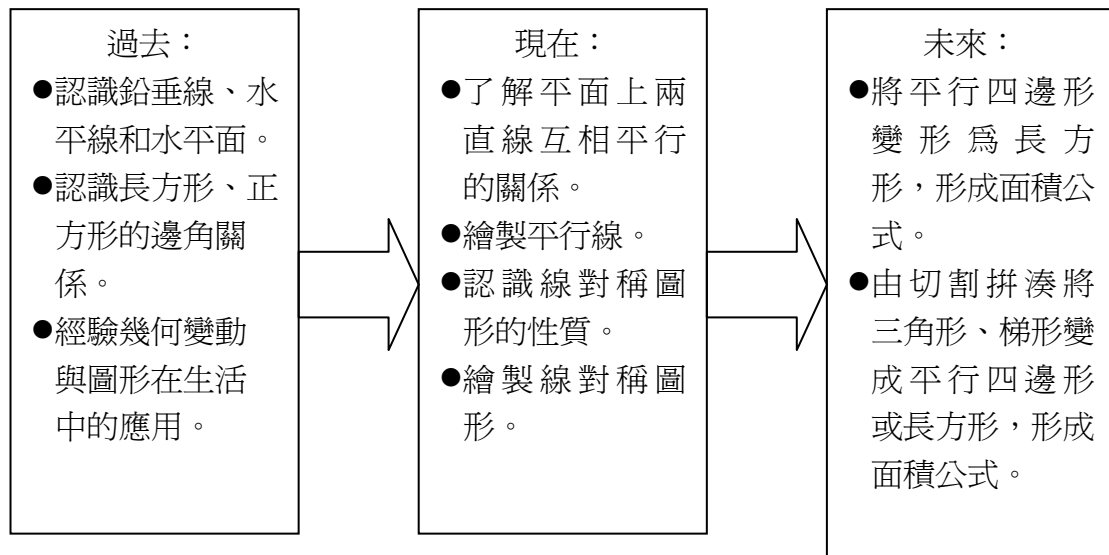
在此次教學設計中，研究者希望改變學生學習數學的動機，也希望能改變學生對數學的刻板印象。換句話說，我們希望在教導學生數學概念時，同時也培養出學生另一種能力或是生活態度、興趣。

對學生來說，透過藝術與人文的活動，數學課就會變得更有魅力。我們引進達文西的例子，一方面是想讓學生透過認識數學家的角度來提高學習數學的興

趣，另一方面也希望讓學生見賢思齊，在學習數學的路上有一盞明燈指引著。更重要的是，從藝術的角度學數學，學生不但可以一窺數學神秘精采之處，也間接陶冶學生的人文氣息。

貳、課程設計與教學架構

一、教材地位



二、教材內容分析

根據研究者任教國小數學平行與對稱教材（康軒文教事業，2006），本單元課程內容可成「平行」和「對稱」兩個學習內容。分別介紹如下：

（一）平行

1. 根據九年一貫課程綱要（教育部，2003）名詞解釋，所謂「平行」即平面上兩直線沒有交點，稱此兩直線互相平行。
2. 對於兩直線平行的意義，可以有下列不同的說法（康軒，2005）：
 - （1）兩直線間的距離處處相等。

(2) 兩直線同時垂直於第三直線。

(3) 兩直線永不相交。

3. 透視法：繪畫上最常用的是平行透視。它根據視覺上的錯覺，當平行線延伸到遠處感覺會交於一點。通過畫面上線條的特別安排，來組成人與物，或物與物的空間關係，令其具有視覺上立體及距離的表象。

(二) 對稱

1. 根據九年一貫課程綱要（教育部，2003）名詞解釋，所謂「線對稱」即是指兩圖形以一直線為鏡射圖形的現象，稱為線對稱。

2. 線對稱的意義（劉好，1998）

(1) 操作定型定義（直觀的概念）：若一個圖形可沿著某一直線對折，使其在直線兩側的部分完全重合，這種圖形稱為關於此折線的對稱圖形，簡稱為線對稱圖形。

(2) 幾何上的意義：一個圖形，若可以找到一條直線將其平分成兩半，使在其中一半內的任何點，都可以在另一半內找到一個對應點，使得這互相對應的點所連成的直線段，恰被平分此圖形的直線垂直平分，這個圖形即為一種線對稱圖形。

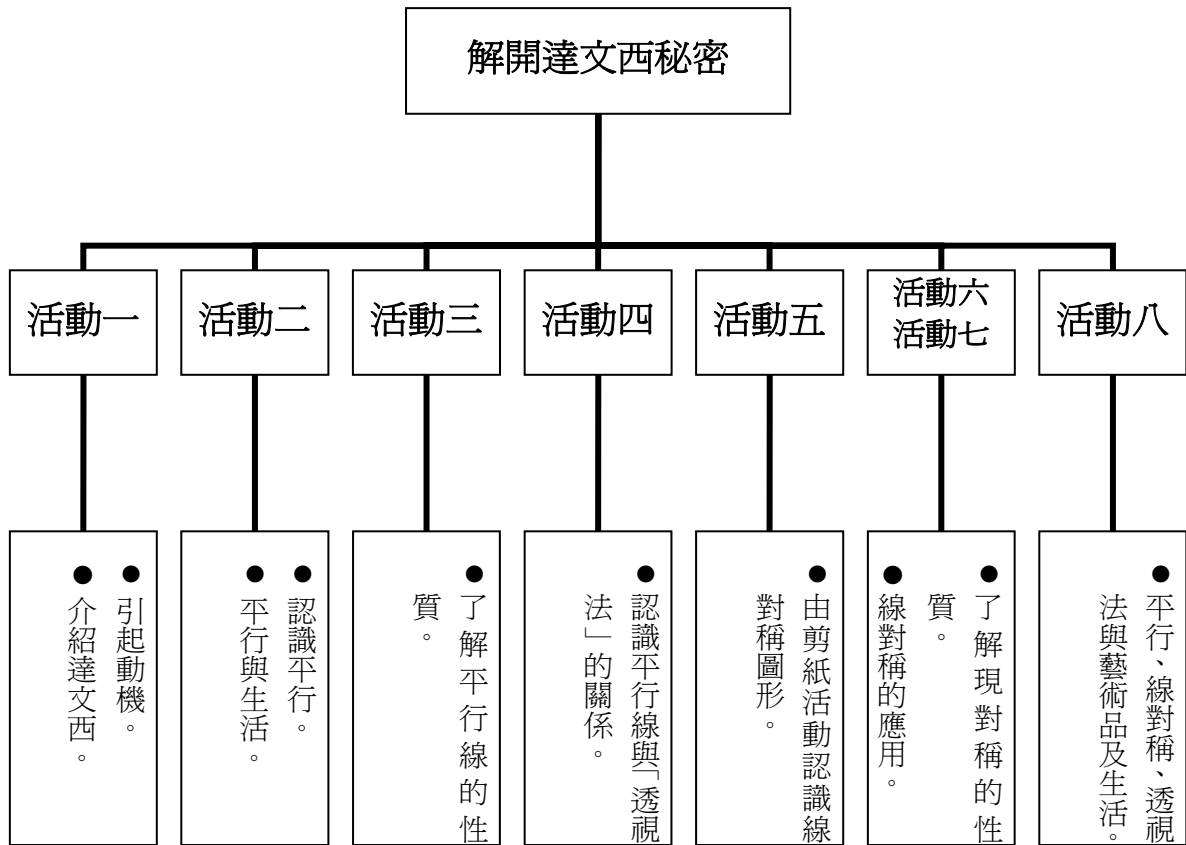
三、能力指標（配合 92 年國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域）

(一) S-2-02 能理解垂直與平行的意義

(二) S-2-03 能透過操作，認識簡單平面圖形的性質

(三) S-2-06 能理解平面圖形的線對稱關係

四、教材架構



參、教學目標

一、課程目標

- (一) 了解平面上兩直線互相平行的關係。
- (二) 認識「透視法」在數學及藝術上的運用。
- (三) 認識線對稱圖形的性質。
- (四) 設計或繪製線對稱圖形。

二、單元目標

（一）活動一：名畫欣賞

1. 能整理所蒐集資料。
2. 能發表並與他人積極討論。

（二）活動二：「平行」不見了

1. 能察覺日常生活中與「平行」有關的事物。
2. 能舉例「平行」在日常生活中的運用。
3. 能依自己的意見主動表達「平行」的特性。
4. 察覺到平行線是兩條永不相交的直線。

（三）活動三：畫長方形比賽

1. 能了解平行線是兩條永不相交的線。
2. 能了解兩條平行線會同時垂直於一條直線。
3. 能了解兩條平行線間的任何垂直距離都一樣長。

（四）活動四：平行線與透視法

1. 能察覺視覺上的平行線與數學上的平行線的差異。
2. 知道「透視法」的簡單運用方法。

（五）活動五：剪紙遊戲

1. 能觀察出線對稱圖形兩邊完全疊合的特性。
2. 能察覺對摺後的折線就是這個圖形的對稱軸。

（六）活動六：對稱追追追

1. 能理解互相重疊的兩點稱為對應點；互相重疊的邊稱為對應邊；互相重疊的角

稱為對應角。

2. 能理解對應邊一樣長，對應角一樣大
3. 能理解通過兩個對應點的直線會和對稱軸垂直；且兩個對應點到對稱軸的距離是相等的。

(七) 活動七：點對點、邊對邊

1. 能找出線對稱圖形的對應點、對應邊、對應角。

(八) 活動八：解開達文西密碼

1. 能運用線對稱、平行及透視原理繪製一張簡單的圖形。

參、教學活動

一、單元名稱：解開達文西的秘密

二、適用年級：國小5年級

三、教學總時間：7 節，280 分鐘

四、教案設計內容

活動內容	主要活動過程	說明	資源使用	評量重點
活動一：名畫欣賞				
一、名畫介紹 二、教師提問	1. 介紹<u>達文西</u>的生平。 2. 介紹名畫「最後的晚餐」。 3. 從達文西名畫「最後的晚餐」中，小朋友有沒有發現	● 教師可讓學生在課前先自行蒐集<u>達文西</u>及「最後的晚餐」的相關資料。 ● 針對學生的發表若與本單元	● <u>達文西</u>名畫—「最後的晚餐」 ● 電腦、投影機	1. 能整理所蒐集資料。 2. 能發表並與他人積極討論。

	什麼秘密？ 4. 討論及發表	內容無關，教師可依照時間自行調整或引導。 ● 若學生先說出關於「透視法」、「對稱」的名詞，教師可先淡化處理。		
活動二：「平行」不見了				
一、故事引導 二、教師提問	1. 先想一想，如果生活中沒有「平行」，我們的教室會變成怎樣？ 2. 那麼日常生活中會發生哪些不方便的事呢？ 3. 那你覺得什麼是「平行」呢？ 4. 觀察日常生活中的鐵軌，如果不「平行」會發生什麼事？	● 以故事內容引導小朋友學習「平行」的動機。 ● 以逆向思考方式，先讓學生察覺日常生活中哪些東西有「平行」，並思考「平行」應用在日常生活的例子。 ● 當學生以自己的意見表達什麼是「平行」時，可能不是十分精確，例如：學生可能會有的答案是：	● 電腦、投影機	1. 能察覺日常生活中與「平行」有關的事物。 2. 能舉例「平行」在日常生活中的運用。 3. 能依自己的意見主動表達「平行」的特性。 4. 察覺到平行線是兩條永不相交的直線。

		(1)兩條線很直。 (2)兩條線平平的。 此時老師先暫時尊重學生說法，待下一個活動時再予以澄清。 ● 使學生能察覺到：平行線是兩條永不相交的直線。		
教學內容及重點	主要活動或問題	說明	資源使用	評量重點
活動三：畫長方形比賽				
一、畫畫看 二、教師提問 三、畫畫看	1. 小朋友，我們來比賽畫長方形，看誰畫得最好？ 2. 要把長方形畫好的條件是什麼？ 3. 你會不會把長方形畫歪了？為什麼？ 4. 長方形中哪裡有「平行」？ 5. 當長方形的長愈來愈長，圖形會有什麼改變呢？ 6. 在長方形一邊	● 此時老師引導學生從事此活動時將焦點放在長方形兩邊的長是否平行及鄰邊是否垂直。 ● 教師提問時，再次讓學生察覺長方形的兩邊長無論如何延長，永遠不會相交，進而理解兩平行線不相交	● 電腦、投影機 ● 尺、量角器、三角板	1. 能了解平行線是兩條永不相交的線。 2. 能了解兩條平行線會同時垂直於一條直線。 3. 能了解兩條平行線間的任何垂直距離都一樣長。

四、教師提問	的長上任意取一點，並通過此點畫一條垂直線。 7. 再多畫幾條垂直線。 8. 這些垂直線有沒有和另外一邊的長垂直？ 9. 在長方形上的這些垂直線段，有沒有一樣長？ 10. 那你知道長方形會畫歪掉的原因了嗎	● 此活動從實際操作中讓學生了解：當兩條直線同時垂直於另一條直線時，則該兩條直線為平行線。 ● 教師提問中引導學生學習：兩平行線中的每一段垂直距離都一樣長。 ● 從後設認知的觀點引導學生依據自己學習的平行定義檢查畫好長方形的條件。		
教學內容及重點	主要活動或問題	說明	資源使用	評量重點
活動四：平行線與透視法				
一、教師提問 二、介紹「透視法」 三、畫畫看	1. 大家根據螢幕上的照片，有沒有發現平行線？ 2. 怎麼鐵路好像最後會交於一點？ 3. 繪畫上使用「透視法」的原理。	● 讓學生察覺生活中視覺上所看到的平行線在遠處是會交於一點。 ● 以學生能理解的基礎下，配合實物，解釋「透視法」的運用。	● 鐵路照片 ● 電腦、投影機	1. 能察覺視覺上的平行線與數學上的平行線的差異。 2. 知道「透視法」的簡單運用方法。

	4. 利用「透視法」簡單的畫出一幅圖畫。	● 強調雖然兩條平行線交於一點在視覺上是可能的，但是在數學學習上我們的定義還是不相同。		
教學內容及重點	主要活動或問題	說明	資源使用	評量重點
活動五：剪紙遊戲				
一、做做看： 二、教師提問	1. 將色紙對摺之後，按照所指示的圖案剪下。 2. 將色紙打開後，原來是個「春」字。 3. 為什麼會剛好剪出一個「春」字？ 4. 把剪後的色紙對折後，檢查看看有沒有完全疊合？ 5. 再把色紙打開後，觀察中間的摺線，你發現什麼？	● 藉著摺紙剪字的過程中，讓學生實際感受線對稱圖形兩邊完全疊合的特性。 ● 藉著以摺線為中心，讓學生觀察折線兩側的圖形和全等有何不同。 ● 藉著把剪過的色紙對摺再打開的過程中，察覺對摺後的折線就是這個圖形的對稱軸。	● 電腦、投影機 ● 剪刀、色紙	1. 能觀察出線對稱圖形兩邊完全疊合的特性。 2. 能察覺對摺後的折線就是這個圖形的對稱軸。
教學內容及重點	主要活動或問題	說明	資源使用	評量重點
活動六：對稱追追追				
一、教師提問	1. 日常生活中有哪些是可以看	● 教師可以藉此知道學生說出	● 電腦、投影機	1. 能找出對稱在生

	到「對稱」的？ 2. 在藝術作品上常常可以找到對稱的圖形，你知道為什麼嗎？	他所認知的「對稱」是否正確。 ● 讓學生對所學的「對稱」不只在數學上，其實更運用於生活中，並進一步培養美感。	● 對稱照片	活中的運用。
教學內容及重點	主要活動或問題	說明	資源使用	評量重點
活動七：點對點、邊對邊				
一、做做看：	1. 我們人體是不是一個對稱的形狀？如果是，對稱軸在哪裡？ 2. 請把身體當作是一個對稱圖形，將左右兩邊疊合在一起。 3. 你有沒有發現，左手的拇指和右手的拇指疊合在一起？左手臂是不是和右手臂疊合在一起？ 4. 現在拿出一個	● 在左右差異不是很大的情況下，教師引導學生將身體視為一個線對稱圖形。 ● 學生藉由身體去感受對應點和對應邊的關係，再進一步由圖形中去找找到互相重疊的兩點稱為對應點；互相重疊的邊稱為對應邊；互相重疊的角稱為對應角。 ● 透過連接兩個	● 電腦、投影機 ● 對稱圖片 ● 尺、量角器	1. 能理解互相重疊的兩點稱為對應點；互相重疊的邊稱為對應邊；互相重疊的角稱為對應角。 2. 能理解對應邊一樣長，對應角一樣大 3. 能理解通過兩個對應點的直線會和對稱軸垂

	左右對稱的圖形，將它沿著對稱軸對摺疊在一起。有沒有發現頂點和頂點是疊合在一起？對邊和對邊是疊合在一起？	斡 點 的 方 法，學生會發現：通過兩個對應點的直線會和對稱軸垂直；且兩個對應點到對稱軸的距離是相等的。此概念有助於學生去畫出對稱圖形		直；且兩個對應點到對稱軸的距離是相等的。
	5. 打開疊合的左右對稱圖形，量量看兩個對應邊有沒有不一樣長，兩個對應角有沒有不一樣大。 6. 連接兩個對應點，你發現什麼？			
教學內容及重點	主要活動或問題	說明	資源使用	評量重點
活動八：解開達文西的秘密				
一、答案揭曉	1. 發現了嗎？原來 <u>達文西</u> 的「最後的晚餐」圖裡隱含了透視法和對稱圖形在內。	● 將「最後的晚餐」圖畫細節去掉，只留下透視線條及對稱的輪廓。 ● 和學生討論所有藝術品中包含透視的技巧及對稱所產生的美感。	● 電腦、投影機 ● <u>達文西</u> 名畫—「最後的晚餐」	1. 能描繪對稱圖形
二、畫畫看	2. 你會利用這兩種方法畫出一幅圖畫嗎？			

從達文西的名畫學數學—藝術與人文領域融入數學「平行與對稱」教學活動設計

五、教學評量

(一) 資料蒐集、報告：如對達文西生平及其數學或藝術上的貢獻等資料搜索，並於課堂與同學分享。

(二) 學習單：如附件一、二（請參考電子全文版）。

<http://www.npue.edu.tw/academic/grad-ms/science/magazine/contents/magazine26.htm>

(三) 實作：如剪紙活動。

(四) 筆試：最後總結性評量。

六、教具使用

(一) 電腦、投影機、布幕：播放教學powerpoint內容。

(二) 教學用尺、三角板、量角器。

(三) 剪刀、色紙：示範用。

伍、討論

一、教學成果

(一) 學習單

如附錄圖1至圖4是實施本教材前，先給學生畫的圖畫。由此四圖中可知，學生雖然對於平行和對稱有初步的概念，可是對於空間的立體感卻表現卻不佳。也就是說，所有的生物都是平躺在紙上而不是「站」在路上。經過此課程的學習之後，我們發現學生可以透過透視法的原理，將圖畫表現的更立體，同時景色的遠近也可以清楚表達。如圖5至圖9。

(二) 數學日記（以代號代替學生名）

1. 甲生：我覺得這種教學方式很特別，以前我沒有上過這樣的數學課，我很喜歡。
2. 乙生：我希望老師以後能多多用這種方式上課，有投影機和動畫讓我有興趣想要上課。

3. 丙生：我平常就喜歡剪剪貼貼或畫畫一些可愛的卡通圖案了，沒想到，這次的數學課還能和畫圖有關係呢！
4. 丁生：在尋找達文西的資料時，我知道了許多關於達文西的故事。我覺得達文西是個天才！而且，原來數學及科學與我們的生活有很大的關係。
5. 戊生：以前上數學課都是老師在講課，大部分我們用聽的，或小組討論。這次上數學課有一種不一樣的感覺，每一個活動都很新鮮，感覺好像不是在學數學，可是老師教的部分我卻都聽得懂。
6. 己生：我以前一直以爲數學只是不斷在想一些很難的題目，不過這次的上課我發現到數學也可以應用到其他方面，而且原來在做美勞時還會想到數學，數學的範圍真是廣。

二、檢討

- (一) 因爲本校資訊融入教學的方式並不是十分普遍，所以當要實施時，最大的困難在於器材的商借及使用。例如教室裡面沒有投影機和投影布幕，那麼要把器材搭設起來可能不是十分方便。
- (二) 數學課要結合藝術與人文課一起實施，那麼本課程才能充實的實施。因爲在課程緊湊的情況下，一週四節的數學課可能很難慢慢的完成這些活動。這也是值得我們深思之處。

參考文獻

康軒文教事業（2006）。**第十冊數學科教師手冊**。康軒文教事業出版。

教育部(2003)。**九年一貫數學學習領域課程綱要**。台北市：教育部。

劉好（1998）。平面圖形教材之處理。**國民小學數學科新課程概說（高年級）**。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

謝堅、朱建正、魯炳寰、廖淑麗（2002）。**國小數學教材分析—幾何**。國立教育研究院籌備處。