

# 以奠基理念發展國中七年級一元一次方程式 補救教材

蕭新雄<sup>1</sup>、徐偉民<sup>2</sup>

<sup>1</sup>國立屏東大學科普傳播學系研究生

<sup>2</sup>國立屏東大學科普傳播學系教授

## 壹、前言

數學學習領域九七課程綱要（教育部，2008）中，代數為一個重要主題，其中一元一次方程式更是代數學習的重要基礎，它會影響往後多項式、函數或抽象代數的學習。然而，國中學生在一元一次方程式單元卻遭遇極大的挫折，如此重要的代數知識，讓許多國中生感到十分頭痛，因而排斥、抗拒學習，於是產生了很多需要補救的數學低成就學生。

筆者認為一元一次方程式學習問題的形成原因有二：一是國中的教學缺乏具體情境的引導，很快就進入抽象的代數運算，導致學生無法有意義的了解，只記憶規則而產生了錯誤和迷思（王如敏，2004；楊榮達，2006；張景媛、余采玲、鄭章華、范德鑫，2012；郭輝煌，2014）；一是過多的抽象運算讓學習變的枯燥乏味，導致學生對一元一次方程式的學習產生反感、無興趣（田興蓉，2003；劉環毓，2008；賴勤薇，2011）。所以，筆者想要針對上述兩個原因，設計一套有效的補救教材，將學生在一元一次方程式的學習問題予以解決，提高其學習成效。

筆者發現國立臺灣師範大學數學教育中心所推動的「奠基數學」正好可以解決上述問題，「奠基數學」認為教學活動在設計上應該有兩個原則，那就是「具象有感」和「活潑有趣」（教育部，2014）。教師應該以學生為中心研發活動教材，讓數學的學習變得有趣，引發學習數學興趣，並從具象操作中學得重要的數學概念。所以，筆者決定以「奠基」理念來設計一元一次方程式補救教材。

## 貳、奠基數學的理論基礎

「奠基數學」一詞來自於教育部委託國立臺灣師範大學數學教育中心所承辦「就是要學好數學(JUST DO MATH)」計畫(教育部, 2014)。

「奠基」是在學生學習前, 先讓學生經由活潑有趣的數學活動, 激發學生對數學的興趣, 可引起學生的數學學習動機; 同時, 在進行數學活動時, 養成學習數學內容的具象經驗, 讓學生體會與數學單元連結的關鍵點, 促使學生在關鍵點引動的好奇心驅使下, 進一步探索相關問題, 之後進入數學教室學習相關單元時能具象有感的學習。

目前, 大部分的數學奠基模組是根據 Bruner 的三種學習表徵(動作、圖像、符號)而設計的, 針對數學概念選擇適當的圖像表徵來轉化成具體操作活動, 再規劃成遊戲的教學活動。以下就 Bruner 的表徵理論和數學遊戲融入教學做探討。

### 一、 Bruner 的表徵理論

Bruner (1966)由運思的觀點, 認為表徵是指人類經由認知表徵的過程獲得知識, 並進一步將其分為三種類型(引自張春興, 1994):

#### 1. 動作表徵(enactive representation)

動作表徵是指靠動作來獲得知識。例如: 在數學學習上, 以教導「有兩堆糖果, 一堆有 7 顆糖果、另一堆有 5 顆糖果, 請問共有幾顆糖果?」為例, 在動作表徵下, 教師會教導學生實際操作 7 顆糖果和 5 顆糖果, 並把他們合在一起, 點數以得知結果為 12。

#### 2. 圖像表徵(iconic representation)

指利用對物體知覺留在記憶中的心像, 即可獲得知識, 當具體物消失時, 兒童仍能依照腦中實物的影像, 來進行內在的運思活動。例如: 在數學學習上, 以教導「有兩堆糖果, 一堆有 7 顆糖果、另一堆有 5 顆糖果, 請問共有幾顆糖果?」為例, 在圖像表徵下, 學生以心像運思或畫圈圈取代實際操作糖果, 得知結果為 12。

### 3. 符號表徵(symbolic representation)

指運用符號、語言文字為依據認識外界事物。以「有兩堆糖果，一堆有 7 顆糖果、另一堆有 5 顆糖果，請問共有幾顆糖果？」為例，在符號表徵下，學生只要在內心運算或以算式「 $7 + 5 = 12$ 」呈現即可。

Piaget (1974)強調，兒童須藉由具體操作來認知，經由操作的結果，兒童始能將獲得的資料在心中加以變形，形成邏輯系統，使之能被組織和利用。

Sfard 與 Linchevski (1994) 以知識發生的觀點檢視代數思考的成長，並提出數學概念的過程物件 (process-object) 性質，將數學概念分為操作性概念 (operational conceptions) 和結構性概念 (structural conception)，認為數學概念的初始概念是操作性概念，而透過具體化的過程，數學物件也就是結構性概念方得以產生。

綜合以上，說明了具體操作是概念教學的基礎，尤其是低成就學生的補救教學，在概念的引導和發展上一定得從具體操作開始，才能使其理解。

## 二、 數學遊戲融入教學

Dewey (1938)指出遊戲在學校課程中應佔有明確地位，其目的在增進知識及充實社會行為，缺乏遊戲活動之教育，不能得到有效的學習。所以遊戲活動富含教育的意義，不管在知識技能的獲得和應用，或是個體在群體中的角色扮演，都可透過遊戲來完成。

多數研究顯示數學遊戲結合教學不僅能有效引起學生的學習興趣與動機，對其學習態度亦有正面影響。因為學生在遊戲中是一個主動參與的角色，不僅能表達自己的想法，亦能自己建構知識 (田興蓉，2003；劉環毓，2008；賴勤薇，2011)。

綜合以上，若能於教學中配合教材內容設計相關的數學遊戲，讓學生可以透過數學遊戲建構數學的概念或者運用數學的知識，解決遊戲中的問題，培養帶得走的能力，將是寓教於樂的最佳模式。

## 參、一元一次方程式的補救教材內容

補救教材設計第一件重要工作就是確定學習內容，也就是低成就學生應該學會什麼？筆者從兩個向度來分析一元一次方程式的學習內容，一是解題歷程，一是關係類型，分析如下：

### 一、 解題歷程

一元一次方程式的主要解題歷程有二：一是列方程式，一是解方程式。其中列方程式歷程為設未知數→以符號代表數→整合出方程式；解方程式歷程為化簡運算→等量公理或移項法則求解。詳細如下圖。



圖 1 一元一次方程式的解題歷程

### 二、 關係類型

在相同的解題歷程下，題目有困難有簡易，學生該學會怎樣的難度，且題目難易度又如何分別，這又是傷腦筋的事。在分析所有題目類型後，決定由文字題的關係類型來決定問題的難度。筆者先由「未知數出現的位置和次數」決定關係型態有三種：未知數出現在等號單側一次、未知數出現在等號單側兩次、未知數出現在等號雙側各一次，接著，在這三種型態下，由「以符號代表數的次數」決定其關係複雜度，選取次數為1~4次，最後決定學生應該學會的五種關係類型如下表：

表1 一元一次方程式關係類型分析表

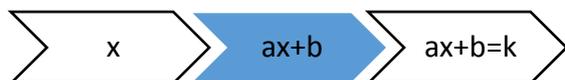
未知數出現的位置和次數	未知數出現在等號單側 一次		未知數出現在等號單側 兩次		未知數出現在等號雙側 各一次
以符號代表數的次數	1次	2次	3次	4次	2次
關係類型	$ax+b=k$	$c(ax+b)+d=k$ (c 為正整數)	$(ax+b)-(cx+d)=k$	$(ax+b)+e(cx+d)=k$ ( $e \neq -1$ , e 為整數)	$ax+b=cx+d$

註：考慮數學低成就學生的計算能力，補救教材中所選用的數字盡量以整數為主，若有分數也以簡單型態呈現。

茲將各關係類型的「以符號代表數的次數」及「難易順序」說明如下：

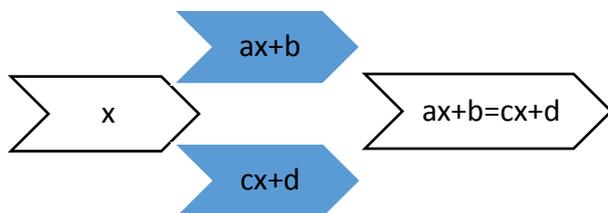
(一) 由列方程式歷程分析各關係類型的「以符號代表數的次數」

1. 關係類型一： $ax+b=k$



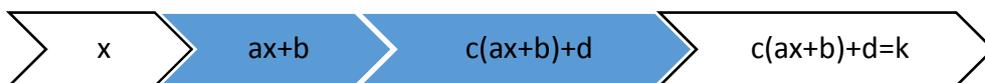
∴以符號代表數 1 次。

2. 關係類型二： $ax+b=cx+d$



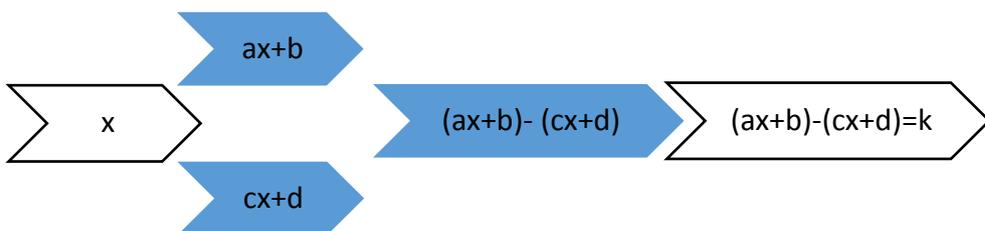
∴以符號代表數 2 次。

3. 關係類型三： $c(ax+b)+d=k$



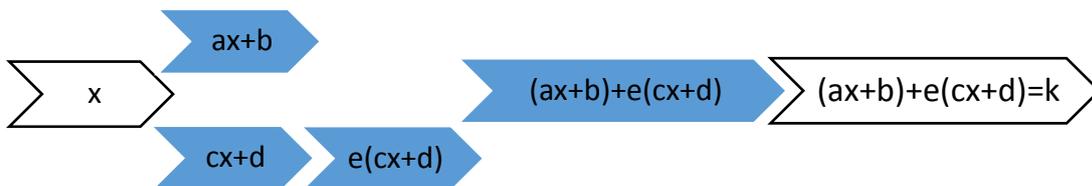
∴以符號代表數 2 次。

4. 關係類型四： $(ax+b)-(cx+d)=k$



∴以符號代表數 3 次。

5. 關係類型五： $(ax+b)+e(cx+d)=k$



∴以符號代表數 4 次。

關係類型五的問題以「雞兔同籠問題」為代表。例如，問題「有 5 元郵票和 12 元郵票兩種，小明總共買了 18 張郵票共花了 160 元，那麼小明買了 5 元郵票和 12 元郵票各多少張？」先假設 5 元郵票  $x$  張，再以  $18-x$  表示 12 元郵票的張數，以  $5x$  表示 5 元郵票的花費，以  $12(18-x)$  表示 12 元郵票的花費，以  $5x+12(18-x)$  表示總共花費，最後列方程式  $5x+12(18-x)=160$ 。上述每個畫底線的部分都是一次以符號代表數，共 4 次。

(二) 由解方程式及列方程式分析各關係類型的難易度

1. 以解方程式的難度而言

由易至難依序是  $ax+b=k$ ， $ax+b=cx+d$ ， $c(ax+b)+d=k$ ， $(ax+b)-(cx+d)=k$ ，

$(ax+b)+e(cx+d)=k$ 。因為前兩者是單純的等量公理或移項法則求解，且  $ax+b=cx+d$  運算難度高於  $ax+b=k$ ；而後三者必須先經過化簡運算後才能進行求解，且由去括號的難度(難度依序是正整數倍，負 1 倍，負整數倍)和同類項合併的項數可看出， $(ax+b)+e(cx+d)=k(e \neq -1, e \text{ 為整數})$  難度高於  $(ax+b)-(cx+d)=k$ ， $(ax+b)-(cx+d)=k$  難度高於  $c(ax+b)+d=k(c \text{ 為正整數})$ 。

## 2. 以列方程式的難度而言

由易至難依序是  $ax+b=k$ ， $ax+b=cx+d$ ， $c(ax+b)+d=k$ ， $(ax+b)-(cx+d)=k$ ， $(ax+b)+e(cx+d)=k$ 。因為以符號代表次數後者比前者高，所以後者難度高於前者。其中  $ax+b=cx+d$  和  $c(ax+b)+d=k$  的以符號代表數次數雖然都是兩次，但因為  $c(ax+b)+d=k$  在列方程式時使用了間接關係，而  $ax+b=cx+d$  只使用了直接關係，所以  $c(ax+b)+d=k$  比  $ax+b=cx+d$  難度高。上述之直接關係是指此題目中的某兩個物件(二元)不需透過第三者就能建立關係，例如  $y=3x+1$  或  $2x+3y=5$  中， $x$  和  $y$  是直接關係；而間接關係則需要第三者、第四者等為媒介才能建立關係，例如  $y=3x+1$ ， $z=2y-3$ ，所以  $z=2(3x+1)-3$ ，則  $x$  和  $z$  是透過  $y$  而有間接關係。

綜合上述，有了一元一次方程式解題歷程和關係類型的架構後，對於補救教材的編製就有很好的依據。

# 肆、一元一次方程式補救教材的設計說明

## 一、教材設計的重要考量

補救教材的設計必須考量許多面向，包含教材架構、教學策略、問題選編等，其說明如下：

### (一) 教材架構

張新仁(2001)指出補救課程的規劃上，要考慮由易至難、由簡而繁等原則，才能重新建立學生的自信與學習動機。所以，筆者以五個關係類型做為補救教材架構，並依各關係類型的難度(由易至難)作為教材編排次序  $(ax+b=k \rightarrow ax+b=cx+d \rightarrow c(ax+b)+d=k \rightarrow (ax+b)-(cx+d)=k \rightarrow$

$(ax+b)+e(cx+d)=k$ )。希望低成就學生能完整且有層次的學習一元一次方程式代數運算和問題解決概念。

## (二) 教學策略

本補救教材的教學策略是採用奠基理念來進行教學活動，也就是筆者須發展具象有感、活潑有趣的數學活動來使學生有意義的理解一元一次方程式相關概念並提升數學學習興趣。活動的設計是依據Bruner的表徵理論，由具體物的操作讓學生形成簡單問題解決的心像為開始，再以圖像卡片的操作來表徵複雜問題並精緻學生的心像，最後在心像的輔助運思下，漸漸達到以符號表徵來解決問題為目的，並在教學活動中搭配相關數學遊戲來提升學生對數學學習的興趣。

## (三) 問題選編

在補救教材架構和補救教學策略確定後，接著就是選編數學問題來充實教材內容，在此必須思考兩個需求，一是數學問題必須能完整涵蓋一元一次方程式的代數運算和問題解決概念；一是數學問題的情境必須是低成就學生可操作且容易理解的。

在概念完整的需求方面，五個關係類型已提供了完整一元一次方程式的學習內容架構，只要充實問題來涵蓋所有化簡運算狀況就能達成需求。所以，筆者在每個關係類型下，考慮不同的運算狀況，再設計了數小題不同化簡運算的文字題，並以五個解題歷程為學習目標貫穿每個問題，希望學生能學會代數運算和問題解決的完整概念。例如，在關係類型 $(ax+b)+e(cx+d)=k$ 下，設計兩小題文字題，其題目方程式為 $3x+2(15-2x)=24$ 和 $(2x+5)-3(9-x)=3$ ，這兩小題在列方程式和求解方法上並無明顯差異，主要的差異在於正整數倍 $2(15-2x)$ 和負整數倍 $-3(9-x)$ 的去括號化簡運算，筆者希望學生在這樣的佈題下能完整學會「去括號規則」和「同類項合併」。

在數學問題情境方面，因為本研究的數學問題全部是自編的，所以在數學問題的設計時，筆者必須尋找好的情境來呈現數學問題，也就是這樣的題目情境對學生是可操作並容易理解的，且可以發展整個教材架構的所有問題。符合這需求的以離散型的珠子罐子情境最為適合，所以筆者選取珠子罐子作為數量表徵物並為其編造問題情境，在編造這些問題情境時，

筆者試著融入電影《魔戒》的角色及有趣故事，以增加教材樂趣。例如，題目方程式為 $(2x+5)-3(9-x)=3$ 的數學問題，其情境敘述為：

「7月8日，紅通通農場裡， 生出2罐魔法蛋， 又生出5顆魔法蛋；而綠油油農場裡， 生出9顆魔法蛋後被 偷吃了1罐魔法蛋，而且 3 出現了。最後，哈比人Hobbits比較7月8日兩個農場魔法蛋數量，結果紅通通農場比綠油油農場多了3顆，請問7月8日那天每罐魔法蛋是多少顆？」

其中可操作的具體物(圖像卡片)為以珠子表徵魔法蛋(圖像○表示1顆， ○○○○○○○○○○ 表示生出10顆)，以玻璃罐表徵罐子(圖像 表示一罐x顆，  表示被吃掉一罐)，以 3 表示原有數量變為3倍，以不同塑膠托盤表徵不同農場(如附錄一)。

## 二、 教材的內容及範例說明

筆者開發的補救教材共有五份學習單(如附錄二)，兩份輔助學習單及三份數學遊戲單，其教學流程及設計理念如下圖：



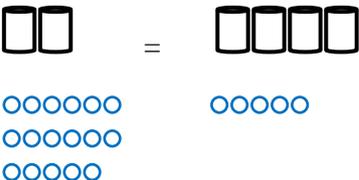
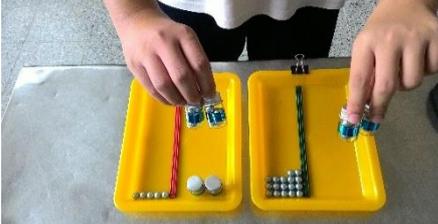
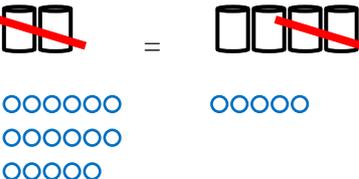
圖 2 教學流程及設計理念圖

以下筆者以三個範例，來說明奠基活動教材如何以具體操作和數學遊戲來進行一元一次方程式的補救教學。

(一) 具體物操作範例：學習單二—由具體物操作理解未知數、等量公理、移項法則的概念及方程式 $ax+b=cx+d$ 的問題解決

問題舉例：「若左盤放置2罐又17顆珠子，而右盤放置4罐又5顆珠子，這時候左右兩托盤的珠子數量相等，則一罐珠子有幾顆？」，筆者預備操作的具體物，請小組討論，由具體操作找出一罐珠子有幾顆並紀錄如下表：

表2 具體物操作過程表

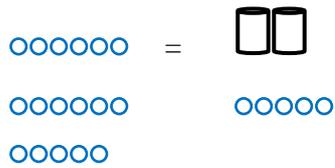
解題操作過程 (學生在此欄畫出簡單圖像)	代數運算:等量公理	代數運算:移項法則
 	$2x+17=4x+5$	$2x+17=4x+5$
 	$2x+17-2x=4x+5-2x$	$17=4x+5-2x$
	(左右兩盤各拿走兩罐)	(因為 $2x-2x=0$ ，所以省略不寫)



$$17=2x+5$$

$$17=2x+5$$

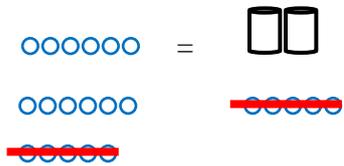
(左右兩盤各拿走兩 (x 項合併結果)  
罐後的結果)



$$17-5=2x+5-5$$

$$17-5=2x$$

(左右兩盤各拿走 5 (因為  $5-5=0$ ，所以  
顆) 省略不寫)



$$12=2x$$

$$12=2x$$

(左右兩盤各拿走 5 (常數項合併結果)  
顆後的結果)





$$12 \div 2 = 2x \div 2$$

$$12 \div 2 = x$$

(左右兩盤各等分成兩份)

(因為  $2 \div 2 = 1$ ，所以省略不寫)

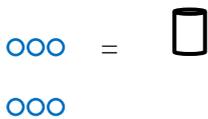


$$6 = x$$

$$6 = x$$

(左右兩盤各等分成兩份，取其中一份的結果，)

(運算結果)



老師要求學生檢驗答案的合理性並寫答。

$$2 \times 6 + 17 = 29$$

$$4 \times 6 + 5 = 29$$

所以答案正確

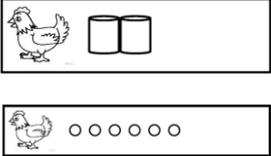
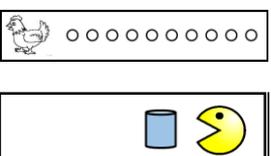
答:1 罐有 6 顆珠子

(同左)

(二) 圖像卡片操作範例：輔助學習單一由圖卡的操作理解含負數的比較運算

問題舉例如下：

請完成底下表格：利用圖卡的翻面代表變號來進行負數的比較運算

紅通通農場 魔法蛋數量	綠油油農場 魔法蛋數量	觀察紅農場比綠農場多多少? 並做(代數)運算
		$(2x+6)-(10-x)$ $=2x+6-10+x$ $=3x-4$

筆者認為像 $(2x+6)-(10-x)$ 這樣複雜的代數式，其化簡運算已很難用具體物的操作來表徵了，學生也很難想像具體物情境來幫助運思，所以筆者採用圖像直觀比較結果，對應圖卡的翻面操作(減去某數就是加上它的相反數)之運算結果來幫助學生形成心像。

在圖像的直觀比較上，比較運算變成兩種單位(珠子單位1和罐子單位x)各自比較，例如， $(2x+6)$ 比 $(10-x)$ 中 $2x$ 比 $-x$ 多了 $3x$ ； $6$ 比 $10$ 少了 $4$ ，所以化簡運算結果為 $3x-4$ 。再對應圖卡的翻面操作之運算結果， $-(10-x)$ 的操作就是將 $10$ 和 $-x$ 的圖卡翻面，得到 $-10+x$ ，再進行加法運算，其運算是 $(2x+6)-(10-x)=2x+6-10+x=3x-4$ ，最後學會負數倍去括號時要變號、同類項合併的運算規則。其圖卡的操作過程如下圖。

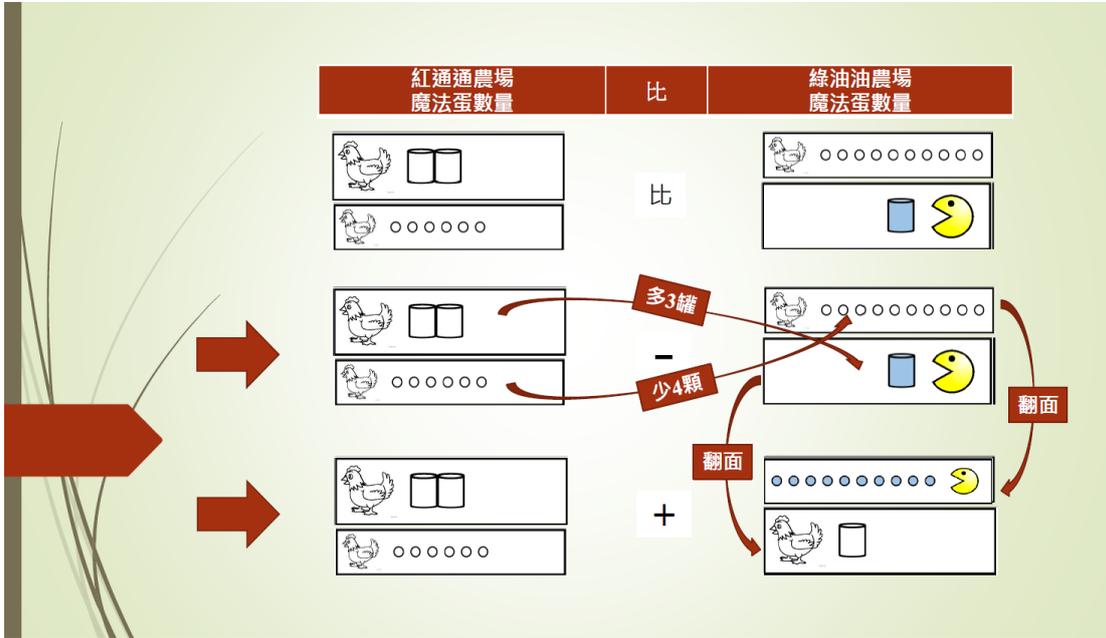
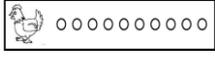
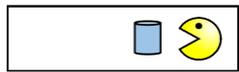
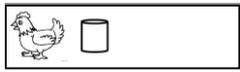


圖 3 圖像卡片操作過程圖

註：每張圖卡有兩面，圖卡翻面表示原面的相反數，例如，的翻面是 ；的翻面是 。

### (三) 數學遊戲範例：數學遊戲三一解題賓果

#### 1. 遊戲規則及紀錄單

遊戲規則：「教師預備16個一元一次方程式及各方程式的解。遊戲競賽前先發給各組兩張賓果遊戲單(4×4方格)及各方程式的解，請各組將這16個解任意填入表格(4×4方格)中。遊戲競賽時，由PPT將每個題目依順序編號播放於布幕上，請各組解題(只要有哪一組完成解題並舉手，則PPT就再顯示下一題且排列於前一題之後，不覆蓋前一題)，各組找出的解若有在16方格內的即圈選(找出的解必須註明第幾題，以防作弊)，遊戲競賽一直到哪組的兩張賓果遊戲方格共連成八條線(每張全部有4橫列、4直行、左右對角

線共十條線)即該組獲勝，並停止競賽。」

舉例說明：

先請小組將 16 個解任意填入下列賓果遊戲方格(每組所填入的位置不一定相同)。

$x=4$	$x=-10$	$x=35$	$x=5$
$x=6$	$a=2$	$a=0$	$x=3$
$x=-8$	$x=9$	$a=\frac{5}{3}$	$x=-7$
$x=\frac{12}{7}$	$x=15$	$x=10$	$a=13$

若PPT已播放的一元一次方程式題目中有 $17-2x=9$ (解為4)， $3x+50=20$ (解為-10)， $x\div 7-2=3$ (解為35)， $3(2x-1)+5=32$ (解為5)，且小組也將其解算出，那麼就可連成一線(如上圖)，哪組最快連成八條線即可獲勝。

## 2. 遊戲概念統整單

目的是在遊戲後做概念統整。學習單中有兩個問題：一是「在此遊戲的方程式中哪五題最困難，請依序列出。」，一是「在此遊戲的解方程式中哪些我不會，請依序列出。」並請學生在列出的方程式後方說明「困難或不會的原因。」

## 伍、結語

徐偉民、劉曼麗(2015)指出大多數教師表示會根據學生程度來決定數學補救課程的目標或內容，但實際上卻是以學生原年級的數學教科書作為

主要教材。由此看來，在補救教學的實施前，發展適合不同起點行為，且符合數學概念的邏輯結構的數學補救教材，是目前教師最急切需要的。所以，國中小的數學教師若想要補救教學實施成功，就必須針對學生的起點行為和學習困難，自行發展一套有效的補救教材。

導致數學低成就的原因不外乎兩種，一是想學卻聽不懂，無法理解教學內容；另一是對數學內容沒興趣不想學，所以在設計補救教材時，具象有感、活潑有趣的特性是很重要的。而教材內容應由淺而深、由簡而繁讓學生建構概念，多給學生由操作來體驗數學現象，多花時間慢慢引導學生歸納出數學內涵，接著多搭配有趣的教學活動、數學遊戲來引起學習動機，這樣才能提升低成就學生的學習成效。因此，本文從奠基理念出發，考慮一元一次方程式學習內容的類型和難易順序，設計以具體操作活動來奠定低成就學生的運算及解題概念基礎，並搭配相關數學遊戲來激發學生對數學學習的興趣，希望能提升低成就學生在一元一次方程式的學習成效。

## 參考文獻

- 王如敏（2003）。國二學生解一元一次方程式錯誤題型分析研究（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。
- 田興蓉（2003）。數學遊戲對國一學生學習動機影響之研究（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學，彰化縣。
- 徐偉民、劉曼麗（2015）。國小攜手計畫數學補救教學課程決定與教學實施之探究。《當代教育研究季刊》，23(1)，113-147。
- 郭輝煌（2014）。雲林縣國中生一元一次方程式錯誤類型之研究（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，台中市。
- 教育部（2008）。國民小學課程標準。台北市：教育部。
- 教育部（2014）。就是要學好數學（JUST DO MATH)計畫。台北市：教育部。
- 楊榮達（2006）。國中一年級學生一元一次方程式解題策略及錯誤類型之研究（未出版之碩士論文）。國立中山大學，高雄市。
- 張景媛、余采玲、鄭章華、范德鑫（2012）。以對話式形成性評量進行數學補救教學的方法。《教育研究月刊》，221，50-64。
- 張春興（1994）。教育心理學。台北市：東華。
- 張新仁（2001）。實施補救教學之課程與教學設計。《教育學刊》，17，85-106。
- 劉環毓（2008）。數學遊戲融入七年級探究教學活動之行動研究（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學，彰化縣。
- 賴勤薇（2011）。數學遊戲融入國中數學科函數單元教學成效之研究（未出版之碩士論文）。國立新竹教育大學，新竹縣。
- Dewey, J. (1938). *Experiential and education*. New York, NY: Collier.
- Piaget, J. (1974). *The child's conception of quantities*. London, England:

Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1941).

Sfard, A., & Linchevski, L.(1994). The Gains and the pitfalls of reification — the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

## 附錄一：情境故事說明

### 情境故事

哈比人 Hobbits 擁有兩個魔法農場，分別稱為紅通通農場和綠油油農

場，這兩個農場都分別飼養一大一小魔法雞，小魔法雞  每次生出魔法

蛋 1 顆，2 顆，3，4，5，6，... 顆不等，大魔法雞  每次生出魔法蛋 1 罐，2 罐，3，4，... 罐不等。

但常有大小精靈來偷吃魔法蛋，小精靈  每次偷吃魔法蛋 1 顆，2

顆，3，4，5，6，... 顆不等，大精靈  每次偷吃魔法蛋 1 罐，2 罐，3，4，... 罐不等。

另外，還有兩種仙子，一種是倍數仙子，一種是等分之一仙子，其複

製倍數或等分分數由仙子的名字決定。例如，3 倍仙子  出現在某農場

時，那農場的魔法蛋就變為原來的 3 倍；而 4 分之一仙子  出現在某農場時，那農場的魔法蛋就變為原來的  $\frac{1}{4}$ 。

哈比人 Hobbits 每天傍晚都會巡視兩魔法農場，並合算或比較兩魔法農場的魔法蛋，以了解兩魔法農場的魔法蛋生產狀況，底下是 7 月份兩魔法農場魔法蛋的生產情形：

註：

1. 生出(偷吃)一罐的意思是生出(偷吃)的魔法蛋數量可裝滿一罐。
2. 當天魔法蛋的大小一定相等，但不同日子裡，魔法蛋的大小卻不一樣。又因為每個罐子容量一定，所以，不同日子裡，每罐魔法蛋數量未必一樣，例如：7/1 當天每罐裝可能有 5 顆魔法蛋；而 7/2 當天每罐裝可能有 7 顆魔法蛋...

附錄二：學習單內容(部分)

學習單一：由具體物操作理解未知數、等量公理、移項法則、解的概念及方程式  $ax+b=k$  的問題解決(舉例)

請按問題的指示操作，並記錄於紀錄單：

注意事項：請小組討論並由具體物操作找出一罐珠子有幾顆，千萬不能將罐中珠子倒出點數。代數運算紀錄請以  $x$  表示一罐珠子的數量。第 5.6.兩題的等量公理記錄須確實記錄 操作動作 和 操作結果。

1. 若左盤放置 1 罐又 3 顆珠子，而右盤放置 13 顆珠子，這時候左右兩托盤的珠子數量相等，則一罐珠子有幾顆？
5. 若左盤放置 3 罐又 5 顆珠子，而右盤放置 23 顆珠子，這時候左右兩托盤的珠子數量相等，則一罐珠子有幾顆？

由具體物操作理解未知數、等量公理、移項法則、解的概念及方程式  $ax+b=k$  的問題解題紀錄(表格經過調整)

問題	實物操作過程的畫圖	操作結果(答案)
問題 1		

問題	實物操作過程的畫圖	代數運算:等量公理	代數運算:移項法則
問題 5			

學習單二：由具體物操作理解未知數、等量公理、移項法則的概念  
及方程式  $ax+b=cx+d$  的問題解決(舉例)

請按問題的指示操作，並記錄於紀錄單：由小組討論解決

注意事項：請小組討論並由具體物操作找出一罐珠子有幾顆，千萬不能將罐中珠子倒出點數。代數運算紀錄請以  $y$  表示一罐珠子的數量。等量公理記錄須確實記錄 操作動作 和 操作結果。

3. 若左盤放置 4 罐又 5 顆珠子，而右盤放置 2 罐又 17 顆珠子，這時候左右兩托盤的珠子數量相等，則一罐珠子有幾顆？

由具體物操作理解未知數、等量公理、移項法則的概念  
及方程式  $ax+b=cx+d$  的問題解題紀錄(表格經過調整)

問題	實物操作過程的畫圖	代數運算:等量公理	代數運算:移項法則
問題 3			

學習單三：由圖像及符號表徵處理方程式  $c(ax+b)+d=k$  的問題解決(舉例)

情境一：7月1日，紅通通農場裡， 生出 3 罐魔法蛋， 生出 5 顆

魔法蛋，高興的是  2 出現了，但之後又被  偷吃了 7 顆魔法蛋。最後，哈比人 Hobbits 結算 7 月 1 日紅通通農場魔法蛋數量，結果是 45 顆，算是還令人滿意，請問 7 月 1 日那天每罐魔法蛋是多少顆？

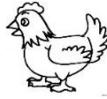
解題引導：按照底下過程記錄於下頁表格中

1. 畫圖呈現( 生出 3 罐魔法蛋， 生出 5 顆魔法蛋)的數量。
2. 畫圖呈現  2 出現後的數量(不必合併數量)。
3. 畫圖呈現( 偷吃了 7 顆魔法蛋)後的數量(不必合併數量)。
4. 畫圖呈現最後結果是 45 顆的數量關係(不必合併數量)。
5. 以  $x$  表示上述數量關係(不必做化簡運算)。(假設每罐魔法蛋數量為  $x$  顆)
6. 解方程式，找出一罐魔法蛋的數量並且驗算答案的正確性。

由圖像及符號表徵處理方程式  $c(ax+b)+d=k$  的問題解題紀錄(表格經過調整)

將過程 1~4 的圖像畫在底下		
過程 1~2	過程 3	過程 4
以 $x$ 列出上述的數量關係(列方程式)		
解方程式，找出一罐魔法蛋的數量並且驗算答案的正確性		

學習單四：由圖像及符號表徵處理方程式  $(ax+b) \pm (cx+d) = k$  的問題解決(舉例)

情境三:7月3日,紅通通農場裡,  生出2罐魔法蛋,  又生出5  
 顆魔法蛋;而綠油油農場裡,在  生出1罐魔法蛋後被  偷吃了3  
 顆魔法蛋。最後,哈比人 Hobbits 合併 7月3日兩個農場魔法蛋數量,結果  
 共是23顆,請問7月3日那天每罐魔法蛋是多少顆?

由圖像及符號表徵處理方程式  $(ax+b) \pm (cx+d) = k$  的問題解題紀錄(表格經過調整)

畫圖呈現數量關係		
紅通通農場	綠油油農場	合併運算
一元一次方程式解題過程		
設未知數:		
列方程式:		
解方程式:		
驗算寫答:		

學習單五：由符號表徵處理方程式  $(ax+b)+e(cx+d)=k$  的問題解決(舉例)

情境七：7月7日，紅通通農場裡， 生出 3 罐魔法蛋；而綠油油農場

裡，在  生出 15 顆魔法蛋後被  偷吃了 2 罐魔法蛋，後來  2 出現了。最後，哈比人 Hobbits 合併 7 月 7 日兩個農場魔法蛋數量，結果共是 24 顆，請問 7 月 7 日那天每罐魔法蛋是多少顆？

由符號表徵處理方程式  $(ax+b)+e(cx+d)=k$  的問題解決紀錄單(表格經過調整)

一元一次方程式解題過程
設未知數：
列方程式：
解方程式：
驗算寫答：