

數學「加減變」的探討

邵國志

屏東縣里港國民小學教師

壹、前言

有一次，我在數學課時出了一道數學腦力激盪的題目，要大家分組想辦法解決此問題並且要提出報告，題目是「使用固定個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數？」，在同學們共同的思考、討論下，研究“數字的加減變化”，最後終於有了一個答案。當數學課報告完畢後，我決定應用學生推算出來的結果，發現其中的規律性，進而歸納出公式，希望能提供師生日後解題的參考。

貳、研究目的

- 一、從1開始，使用2個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數。
- 二、從1開始，使用3個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數。
- 三、從1開始，使用4個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數。
- 四、發現這些整數的規律性，進而歸納出公式。

參、研究設備與器材

- 一、計算機；二、紙；三、筆

肆、研究過程和方法

一、從1開始，使用2個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數

演算過程：

(a) 用1與2：

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1 + 2 \therefore 1、2$ 可算出 1~3 三數

(b) 用1與3：

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 - 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 3 + 1 \therefore 1、3$ 可算出 1~4 三數

(c) 用1與4：

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow x$ 無法推算

(d) 用1與5：

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow x$ 無法推算

※由此推知，用 1 和 3 可算出最多個數：1~4，1 和 4 以上搭配，皆無法推算

二、從1開始，使用3個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數

(a) 用1、2、3

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 3 + 1, 5 \rightarrow 3 + 2, 6 \rightarrow 1 + 2 + 3$

$\therefore 1、2、3$ 可算出 1~6 六數

(b) 用1、2、4

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 2 + 1, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 4 + 1, 6 \rightarrow 4 + 2, 7 \rightarrow 4 + 2 + 1$

$\therefore 1、2、4$ 可算出 1~7 七數

(c) 用1、2、5

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 2 + 1, 4 \rightarrow 5 - 1, 5 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 5 + 1, 7 \rightarrow 5 + 2,$

$8 \rightarrow 5 + 2 + 1 \therefore 1、2、5$ 可算出 1~8 八數

(d) 用1、2、6

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 2$ ， $3 \rightarrow 2 + 1$ ， $4 \rightarrow 6 - 2$ ， $5 \rightarrow 6 - 1$ ， $6 \rightarrow 6$ ， $7 \rightarrow 6 + 1$ ，
 $8 \rightarrow 6 + 2$ ， $9 \rightarrow 6 + 2 + 1$ $\therefore$ 1、2、6 可算出 1~9 九數

(e) 用1、2、7

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 2$ ， $3 \rightarrow 2 + 1$ ， $4 \rightarrow 7 - 2 - 1$ ， $5 \rightarrow 7 - 2$ ， $6 \rightarrow 7 - 1$ ， $7 \rightarrow 7$ ，
 $8 \rightarrow 7 + 1$ ， $9 \rightarrow 7 + 2$ ， $10 \rightarrow 7 + 2 + 1$ $\therefore$ 1、2、7 可算出 1~10 十數

(f) 用1、2、8

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 2$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow x$ 無法推算

(g) 用1、2、9

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 2$ ， $3 \rightarrow 1 + 2$ ， $4 \rightarrow x$ 無法推算
 $\therefore$ 1、2、8 以上搭配，皆無法推算

(h) 用1、3、4

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 4$ ， $5 \rightarrow 4 + 1$ ， $6 \rightarrow 4 + 3 - 1$ ， $7 \rightarrow 4 + 3$ ，
 $8 \rightarrow 4 + 3 + 1$ $\therefore$ 1、3、4 可算出 1~8 八數

(i) 用1、3、5

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 5 - 1$ ， $5 \rightarrow 5$ ， $6 \rightarrow 5 + 1$ ， $7 \rightarrow 5 + 3 - 1$ ，
 $8 \rightarrow 5 + 3$ ， $9 \rightarrow 5 + 3 + 1$ $\therefore$ 1、3、5 可算出 1~9 九數

(j) 用1、3、6

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 3 + 1$ ， $5 \rightarrow 6 - 1$ ， $6 \rightarrow 6$ ， $7 \rightarrow 6 + 1$ ，
 $8 \rightarrow 6 + 3 - 1$ ， $9 \rightarrow 6 + 3$ ， $10 \rightarrow 6 + 3 - 1$ $\therefore$ 1、3、6 可算出 1~10 十數

(k) 用1、3、7

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 3 + 1$ ， $5 \rightarrow 7 + 1 - 3$ ， $6 \rightarrow 7 - 1$ ， $7 \rightarrow 7$ ，
 $8 \rightarrow 7 + 1$ ， $9 \rightarrow 7 + 3 - 1$ ， $10 \rightarrow 7 + 3$ ， $11 \rightarrow 7 + 3 + 1$
 $\therefore$ 1、3、7 可算出 1~11 十一數

(l) 用1、3、8

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 3 + 1$ ， $5 \rightarrow 8 - 3$ ， $6 \rightarrow 8 + 1 - 3$ ， $7 \rightarrow 8 - 1$ ，
 $8 \rightarrow 8$ ， $9 \rightarrow 8 + 1$ ， $10 \rightarrow 8 + 3 - 1$ ， $11 \rightarrow 8 + 3$ ， $12 \rightarrow 8 + 3 + 1$
 $\therefore$ 1、3、8 可算出 1~12 十二數

(m) 用1、3、9

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 3 + 1$ ， $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$ ， $6 \rightarrow 9 - 3$ ，
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$ ， $8 \rightarrow 9 - 1$ ， $9 \rightarrow 9$ ， $10 \rightarrow 9 + 1$ ， $11 \rightarrow 9 + 3 - 1$ ，
 $12 \rightarrow 9 + 3$ ， $13 \rightarrow 9 + 3 + 1$ $\therefore$ 1、3、9 可算出 1~13 十三數

(n) 用1、3、10

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 3 + 1$ ， $5 \rightarrow x$ 無法推算

(o) 用1、3、11

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 3 + 1$ ， $5 \rightarrow x$ 無法推算
 $\therefore$ 1、3 和 10 以上搭配，皆無法推算

(p) 用1、4、5

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow x$ 無法推算

(q) 用1、5、6

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow x$ 無法推算

※由此推得，用 1、3、9 可算出最多數：1~13，1 和任兩個 4 以上搭配，皆無法推算

三、從1開始，使用4個整數，再配合加和減，最多可以得到多少個連續整數

已知三數最多：1，3，9從10起推算

(a) 用1，3，9，10

$1 \rightarrow 1$ ， $2 \rightarrow 3 - 1$ ， $3 \rightarrow 3$ ， $4 \rightarrow 1 + 3$ ， $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$ ， $6 \rightarrow 9 - 3$ ，
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$ ， $8 \rightarrow 9 - 1$ ， $9 \rightarrow 9$ ， $10 \rightarrow 10$ ， $11 \rightarrow 10 + 1$ ， $12 \rightarrow 10 + 3 - 1$ ，
 $13 \rightarrow 10 + 3$ ， $14 \rightarrow 10 + 3 + 1$ ， $15 \rightarrow 10 + 9 - 3 - 1$ ， $16 \rightarrow 10 + 9 - 3$ ，
 $17 \rightarrow 10 + 9 + 1 - 3$ ， $18 \rightarrow 10 + 9 - 1$ ， $19 \rightarrow 10 + 9$ ， $20 \rightarrow 10 + 9 + 1$ ，
 $21 \rightarrow 10 + 9 + 3 - 1$ ， $22 \rightarrow 10 + 9 + 3$ ， $23 \rightarrow 10 + 9 + 3 + 1$
 $\therefore$ 1，3，9，10 可推出 1~23 二十三數

(b) 用1, 3, 9, 11

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 11 - 1$, $11 \rightarrow 11$, $12 \rightarrow 1 + 11$,
 $13 \rightarrow 3 + 11 - 1$, $14 \rightarrow 3 + 11$, $15 \rightarrow 1 + 3 + 11$, $16 \rightarrow 9 + 11 - 3 - 1$,
 $17 \rightarrow 9 + 11 - 3$, $18 \rightarrow 9 + 11 + 1 - 3$, $19 \rightarrow 9 + 11 - 1$, $20 \rightarrow 9 + 1$,
 $21 \rightarrow 9 + 11 + 1$, $22 \rightarrow 9 + 11 \rightarrow 3 - 1$, $23 \rightarrow 9 + 11 + 3$, $24 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 11$
 $\therefore 1, 3, 9, 11$ 可推出 1~24 二十四數

(c) 用1, 3, 9, 12

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 12 - 1$, $12 \rightarrow 12$,
 $13 \rightarrow 1 + 12$, $14 \rightarrow 3 + 12 - 1$, $15 \rightarrow 3 + 12$, $16 \rightarrow 1 + 3 + 12$,
 $17 \rightarrow 9 + 12 - 3 - 1$, $18 \rightarrow 9 + 12 - 3$, $19 \rightarrow 1 + 9 + 12 - 3$,
 $20 \rightarrow 9 + 12 - 1$, $21 \rightarrow 9 + 12$, $22 \rightarrow 1 + 9 + 12$, $23 \rightarrow 3 + 9 + 12 - 1$,
 $24 \rightarrow 3 + 9 + 12$, $25 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 12$
 $\therefore 1, 3, 9, 12$ 可推出 1~25 二十五數

(d) 用1, 3, 9, 13

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$, $12 \rightarrow 3 + 9$,
 $13 \rightarrow 13$, $14 \rightarrow 1 + 13$, $15 \rightarrow 3 + 13 - 1$, $16 \rightarrow 3 + 13$, $17 \rightarrow 1 + 3 + 13$,
 $18 \rightarrow 9 + 13 - 3 - 1$, $19 \rightarrow 9 + 13 - 3$, $20 \rightarrow 1 + 9 + 13 - 3$,
 $21 \rightarrow 9 + 13 - 1$, $22 \rightarrow 9 + 13$, $23 \rightarrow 1 + 9 \rightarrow 13$, $24 \rightarrow 3 + 9 \rightarrow 13 - 1$,
 $25 \rightarrow 3 + 9 + 13$, $26 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 13$
 $\therefore 1, 3, 9, 13$ 可推出 1~26 二十六數

(e) 用1, 3, 9, 14

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$, $12 \rightarrow 3 + 9$,
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 14$, $15 \rightarrow 1 + 14$, $16 \rightarrow 3 + 14 - 1$, $17 \rightarrow 3 + 14$,
 $18 \rightarrow 1 + 3 + 14$, $19 \rightarrow 9 + 14 - 3 - 1$, $20 \rightarrow 9 + 14 - 3$,
 $21 \rightarrow 9 + 14 + 1 - 3$, $22 \rightarrow 9 + 14 - 1$, $23 \rightarrow 9 + 14$, $24 \rightarrow 1 + 9 + 14$,
 $25 \rightarrow 3 + 9 + 14 - 1$, $26 \rightarrow 3 + 9 + 14$, $27 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 14$

$\therefore 1, 3, 9, 14$ 可推出 1~27 二十七數

(f) 用 1, 3, 9, 15

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 - 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1 + 3, 5 \rightarrow 9 - 3 - 1, 6 \rightarrow 9 - 3,$
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3, 8 \rightarrow 9 - 1, 9 \rightarrow 9, 10 \rightarrow 1 + 9, 11 \rightarrow 3 + 9 - 1, 12 \rightarrow 3 + 9,$
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9, 14 \rightarrow 15 - 1, 15 \rightarrow 15, 16 \rightarrow 1 + 15, 17 \rightarrow 3 + 15 - 1,$
 $18 \rightarrow 3 + 15, 19 \rightarrow 1 + 3 + 15, 20 \rightarrow 9 + 15 - 3 - 1, 21 \rightarrow 9 + 15 - 3,$
 $22 \rightarrow 1 + 9 + 15 - 3, 23 \rightarrow 9 + 15 - 1, 24 \rightarrow 9 + 15, 25 \rightarrow 1 + 9 + 15,$
 $26 \rightarrow 3 + 9 \rightarrow 15 - 1, 27 \rightarrow 3 + 9 + 15, 28 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 15$

$\therefore 1, 3, 9, 15$ 可推出 1~28 二十八數

(g) 用 1, 3, 9, 16

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 - 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1 + 3, 5 \rightarrow 9 - 3 - 1, 6 \rightarrow 9 - 3,$
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3, 8 \rightarrow 9 - 1, 9 \rightarrow 9, 10 \rightarrow 1 + 9, 11 \rightarrow 3 + 9 - 1, 12 \rightarrow 3 + 9,$
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9, 14 \rightarrow 1 + 16 - 3, 15 \rightarrow 16 - 1, 16 \rightarrow 16, 17 \rightarrow 1 + 16,$
 $18 \rightarrow 3 + 16 - 1, 19 \rightarrow 3 + 16, 20 \rightarrow 1 + 3 + 16, 21 \rightarrow 9 + 16 - 3 - 1,$
 $22 \rightarrow 9 + 16 - 3, 23 \rightarrow 1 + 9 + 16 - 3, 24 \rightarrow 9 + 16 - 1, 25 \rightarrow 9 + 16,$
 $26 \rightarrow 1 + 9 + 16, 27 \rightarrow 3 + 9 + 16 - 1, 28 \rightarrow 3 + 9 + 16, 29 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 16$

$\therefore 1, 3, 9, 16$ 可推出 1~29 二十九數

(h) 用 1, 3, 9, 17

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 - 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1 + 3, 5 \rightarrow 9 - 3 - 1, 6 \rightarrow 9 - 3,$
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3, 8 \rightarrow 9 - 1, 9 \rightarrow 9, 10 \rightarrow 1 + 9, 11 \rightarrow 3 + 9 - 1,$
 $12 \rightarrow 3 + 9, 13 \rightarrow 1 + 3 + 9, 14 \rightarrow 17 - 3, 15 \rightarrow 1 + 17 - 3,$
 $16 \rightarrow 17 - 1, 17 \rightarrow 17, 18 \rightarrow 1 + 17, 19 \rightarrow 3 + 17 - 1, 20 \rightarrow 3 + 17,$
 $21 \rightarrow 1 + 3 + 17, 22 \rightarrow 9 + 17 - 3 - 1, 23 \rightarrow 9 + 17 - 3,$
 $24 \rightarrow 1 + 9 + 17 - 3, 25 \rightarrow 9 + 17 - 1, 26 \rightarrow 9 + 17, 27 \rightarrow 1 + 9 + 17,$
 $28 \rightarrow 3 + 9 + 17 - 1, 29 \rightarrow 3 + 9 + 17, 30 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 17$

$\therefore 1, 3, 9, 17$ 可推出 1~30 三十數

(i) 用 1, 3, 9, 18

$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3 - 1, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1 + 3, 5 \rightarrow 9 - 3 - 1, 6 \rightarrow 9 - 3$
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3, 8 \rightarrow 9 - 1, 9 \rightarrow 9, 10 \rightarrow 1 + 9, 11 \rightarrow 3 + 9 - 1,$
 $12 \rightarrow 3 + 9, 13 \rightarrow 1 + 3 + 9, 14 \rightarrow 18 - 3 - 1, 15 \rightarrow 18 - 3,$

$16 \rightarrow 1 + 18 - 3$, $17 \rightarrow 18 - 1$, $18 \rightarrow 18$, $19 \rightarrow 1 + 18$, $20 \rightarrow 3 + 18 - 1$,
 $21 \rightarrow 3 + 18$, $22 \rightarrow 1 + 3 + 18$, $23 \rightarrow 9 + 18 - 3 - 1$, $24 \rightarrow 9 + 18 - 3$,
 $25 \rightarrow 1 + 9 + 18 - 3$, $26 \rightarrow 9 + 18 - 1$, $27 \rightarrow 9 + 18$, $28 \rightarrow 1 + 9 \rightarrow 18$,
 $29 \rightarrow 3 + 9 + 18 - 1$, $30 \rightarrow 3 + 9 + 18$, $31 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 18$

$\therefore 1, 3, 9, 18$ 可推出 $1 \sim 31$ 三十一數

(j) 用 1, 3, 9, 19

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 9 + 1 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$,
 $12 \rightarrow 3 + 9$, $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 1 + 3 + 19 - 9$, $15 \rightarrow 19 - 3 - 1$,
 $16 \rightarrow 19 - 3$, $17 \rightarrow 1 + 19 - 3$, $18 \rightarrow 19 - 1$, $19 \rightarrow 19$, $20 \rightarrow 1 + 19$,
 $21 \rightarrow 3 + 19 - 1$, $22 \rightarrow 3 + 19$, $23 \rightarrow 1 + 3 + 19$, $24 \rightarrow 9 + 19 - 3 - 1$,
 $25 \rightarrow 9 + 19 - 3$, $26 \rightarrow 1 + 9 + 19 - 3$, $27 \rightarrow 9 + 19 - 1$, $28 \rightarrow 9 + 19$,
 $29 \rightarrow 1 + 9 + 19$, $30 \rightarrow 3 + 9 + 19 - 1$, $31 \rightarrow 3 + 9 + 19$, $32 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 19$

$\therefore 1, 3, 9, 20$ 可推出 $1 \sim 32$ 三十二數

(k) 用 1, 3, 9, 20

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$, $12 \rightarrow 3 + 9$,
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 3 + 20 - 9$, $15 \rightarrow 1 + 3 + 20 - 9$, $16 \rightarrow 20 - 3 - 1$,
 $17 \rightarrow 20 - 3$, $18 \rightarrow 1 + 20 - 3$, $19 \rightarrow 20 - 1$, $20 \rightarrow 20$, $21 \rightarrow 1 + 20$,
 $22 \rightarrow 3 + 20 - 1$, $23 \rightarrow 3 + 20$, $24 \rightarrow 1 + 3 + 20$, $25 \rightarrow 20 + 9 - 3 - 1$,
 $26 \rightarrow 20 + 9 - 3$, $27 \rightarrow 1 + 9 + 20 - 3$, $28 \rightarrow 20 + 9 - 1$, $29 \rightarrow 9 + 20$,
 $30 \rightarrow 1 + 9 + 20$, $31 \rightarrow 3 + 9 + 20 - 1$, $32 \rightarrow 3 + 9 + 20$, $33 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 20$

$\therefore 1, 3, 9, 20$ 可推出 $1 \sim 33$ 三十三數

(l) 用 1, 3, 9, 21

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$,
 $12 \rightarrow 3 + 9$, $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 3 + 21 - 9 - 1$, $15 \rightarrow 3 + 21 - 9$,
 $16 \rightarrow 1 + 3 + 21 - 9$, $17 \rightarrow 21 - 3 - 1$, $18 \rightarrow 21 - 3$, $19 \rightarrow 1 + 21 - 3$,
 $20 \rightarrow 21 - 1$, $21 \rightarrow 21$, $22 \rightarrow 1 + 21$, $23 \rightarrow 3 + 21 - 1$, $24 \rightarrow 3 + 21$,
 $25 \rightarrow 1 + 3 + 21$, $26 \rightarrow 9 + 21 - 3 - 1$, $27 \rightarrow 9 + 21 - 3$,

$28 \rightarrow 1 + 9 + 21 - 3$, $29 \rightarrow 9 + 21 - 3$, $30 \rightarrow 9 + 21$, $31 \rightarrow 1 + 9 + 21$,
 $32 \rightarrow 3 + 9 + 21 - 1$, $33 \rightarrow 3 + 9 + 21$, $34 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 21$
 $\therefore 1、3、9、21$ 可推出 1~34 三十四數

(m) 用 1、3、9、22

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$,
 $12 \rightarrow 3 + 9$, $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 1 + 22 - 9$, $15 \rightarrow 3 + 22 - 9 - 1$,
 $16 \rightarrow 3 + 22 - 9$, $17 \rightarrow 1 + 3 + 22 - 9$, $18 \rightarrow 22 - 3 - 1$, $19 \rightarrow 22 - 3$,
 $20 \rightarrow 1 + 22 - 3$, $21 \rightarrow 22 - 1$, $22 \rightarrow 22$, $23 \rightarrow 1 + 22$, $24 \rightarrow 3 + 22 - 1$,
 $25 \rightarrow 3 + 22$, $26 \rightarrow 1 + 3 + 22$, $27 \rightarrow 9 + 22 - 3 - 1$, $28 \rightarrow 9 + 22 - 3$,
 $29 \rightarrow 1 + 9 + 22 - 3$, $30 \rightarrow 9 + 22 - 1$, $31 \rightarrow 9 + 22$, $32 \rightarrow 1 + 9 + 22$,
 $33 \rightarrow 3 + 9 + 22 - 1$, $34 \rightarrow 3 + 9 + 22$, $35 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 22$
 $\therefore 1、3、9、22$ 可推出 1~35 三十五數

(n) 用 1、3、9、23

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$, $12 \rightarrow 3 + 9$,
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 23 - 9$, $15 \rightarrow 1 + 23 - 9$, $16 \rightarrow 3 + 23 - 9 - 1$,
 $17 \rightarrow 3 + 23 - 9$, $18 \rightarrow 1 + 3 + 23 - 9$, $19 \rightarrow 23 - 3 - 1$, $20 \rightarrow 23 - 3$,
 $21 \rightarrow 1 + 23 - 3$, $22 \rightarrow 23 - 1$, $23 \rightarrow 23$, $24 \rightarrow 1 + 23$, $25 \rightarrow 3 + 23 - 1$,
 $26 \rightarrow 3 + 23$, $27 \rightarrow 1 + 3 + 23$, $28 \rightarrow 9 + 23 - 3 - 1$, $29 \rightarrow 9 + 23 - 3$,
 $30 \rightarrow 1 + 9 + 23 - 3$, $31 \rightarrow 9 + 23 - 1$, $32 \rightarrow 9 + 23$, $33 \rightarrow 1 + 9 + 23$,
 $34 \rightarrow 3 + 9 + 23 - 1$, $35 \rightarrow 3 + 9 + 23$, $36 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 23$
 $\therefore 1、3、9、23$ 可推出 1~36 三十六數

(o) 用 1、3、9、24

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$,
 $12 \rightarrow 3 + 9$, $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 24 - 9 - 1$, $15 \rightarrow 24 - 9$,
 $16 \rightarrow 1 + 24 - 9$, $17 \rightarrow 3 + 24 - 9 - 1$, $18 \rightarrow 3 + 24 - 9$,
 $19 \rightarrow 1 + 3 + 24 - 9$, $20 \rightarrow 24 - 3 - 1$, $21 \rightarrow 24 - 3$, $22 \rightarrow 1 + 24 - 3$,
 $23 \rightarrow 24 - 1$, $24 \rightarrow 24$, $25 \rightarrow 1 + 24$, $26 \rightarrow 3 + 24 - 1$, $27 \rightarrow 3 + 24$,

$28 \rightarrow 1 + 3 + 24$, $29 \rightarrow 9 + 24 - 3 - 1$, $30 \rightarrow 9 + 24 - 3$,
 $31 \rightarrow 1 + 9 + 24 - 3$, $32 \rightarrow 9 + 24 - 1$, $33 \rightarrow 9 + 24$, $34 \rightarrow 1 + 9 + 24$,
 $35 \rightarrow 3 + 9 + 24 - 1$, $36 \rightarrow 3 + 9 + 24$, $37 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 24$
 $\therefore 1、3、9、24$ 可推出 1~37 三十七數

(p) 用 1、3、9、25

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$, $12 \rightarrow 3 + 9$,
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 1 + 25 - 3$, $15 \rightarrow 25 - 9 - 1$, $16 \rightarrow 25 - 9$,
 $17 \rightarrow 1 + 25 - 9$, $18 \rightarrow 3 + 25 - 9 - 1$, $19 \rightarrow 3 + 25 - 9$,
 $20 \rightarrow 1 + 3 + 25 - 9$, $21 \rightarrow 25 - 3 - 1$, $22 \rightarrow 25 - 3$, $23 \rightarrow 1 + 25 - 3$,
 $24 \rightarrow 25 - 1$, $25 \rightarrow 25$, $26 \rightarrow 1 + 25$, $27 \rightarrow 3 + 25 - 1$, $28 \rightarrow 3 + 25$,
 $29 \rightarrow 1 + 3 + 25$, $30 \rightarrow 9 + 25 - 3 - 1$, $31 \rightarrow 9 + 25 - 3$,
 $32 \rightarrow 1 + 9 + 25 - 3$, $33 \rightarrow 9 + 25 - 1$, $34 \rightarrow 9 + 25$, $35 \rightarrow 1 + 9 + 25$,
 $36 \rightarrow 3 + 9 + 25 - 1$, $37 \rightarrow 3 + 9 + 25$, $38 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 25$
 $\therefore 1、3、9、25$ 可推出 1~38 三十八數

(q) 用 1、3、9、26

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$, $12 \rightarrow 3 + 9$,
 $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 26 - 9 - 3$, $15 \rightarrow 1 + 26 - 9 - 3$, $16 \rightarrow 26 - 9 - 1$,
 $17 \rightarrow 26 - 9$, $18 \rightarrow 1 + 26 - 9$, $19 \rightarrow 3 + 26 - 9 - 1$, $20 \rightarrow 3 + 26 - 9$,
 $21 \rightarrow 1 + 3 + 26 - 9$, $22 \rightarrow 26 - 3 - 1$, $23 \rightarrow 26 - 3$, $24 \rightarrow 1 + 26 - 3$,
 $25 \rightarrow 26 - 1$, $26 \rightarrow 26$, $27 \rightarrow 1 + 26$, $28 \rightarrow 3 + 26 - 1$, $29 \rightarrow 3 + 26$,
 $30 \rightarrow 1 + 3 + 26$, $31 \rightarrow 9 + 26 - 3 - 1$, $32 \rightarrow 9 + 26 - 3$,
 $33 \rightarrow 1 + 9 + 26 - 3$, $34 \rightarrow 9 + 26 - 1$, $35 \rightarrow 9 + 26$, $36 \rightarrow 1 + 9 + 26$,
 $37 \rightarrow 3 + 9 + 26 - 1$, $38 \rightarrow 3 + 9 + 26$, $39 \rightarrow 1 + 3 + 9 + 26$
 $\therefore 1、3、9、26$ 可推出 1~39 三十九數

(r) 用 1、3、9、27

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$,
 $12 \rightarrow 3 + 9$, $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow 27 - 9 - 3 - 1$, $15 \rightarrow 27 - 9 - 3$,

$16 \rightarrow 1 + 27 - 9 - 3$, $17 \rightarrow 27 - 9 - 1$, $18 \rightarrow 27 - 9$, $19 \rightarrow 1 + 27 - 9$,
 $20 \rightarrow 3 + 27 - 9 - 1$, $21 \rightarrow 3 + 27 - 9$, $22 \rightarrow 1 + 3 + 27 - 9$,
 $23 \rightarrow 27 - 3 - 1$, $24 \rightarrow 27 - 3$, $25 \rightarrow 1 + 27 - 3$, $26 \rightarrow 27 - 1$, $27 \rightarrow 27$,
 $28 \rightarrow 1 + 27$, $29 \rightarrow 3 + 27 - 1$, $30 \rightarrow 3 + 27$, $31 \rightarrow 27 + 3 + 1$,
 $32 \rightarrow 27 + 9 - 3 - 1$, $33 \rightarrow 27 + 9 - 3$, $34 \rightarrow 27 + 9 - 3 + 1$,
 $35 \rightarrow 27 + 9 + 3 - 1$, $36 \rightarrow 27 + 9 + 3$, $37 \rightarrow 27 + 9 + 1$,
 $38 \rightarrow 27 + 9 + 3 - 1$, $39 \rightarrow 27 + 9 + 3$, $40 \rightarrow 27 + 9 + 3 + 1$

(s) 用 1、3、9、28

$1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3 - 1$, $3 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 1 + 3$, $5 \rightarrow 9 - 3 - 1$, $6 \rightarrow 9 - 3$,
 $7 \rightarrow 1 + 9 - 3$, $8 \rightarrow 9 - 1$, $9 \rightarrow 9$, $10 \rightarrow 1 + 9$, $11 \rightarrow 3 + 9 - 1$,
 $12 \rightarrow 3 + 9$, $13 \rightarrow 1 + 3 + 9$, $14 \rightarrow x$ 無法推算

※由此可知2個數1、3；3個數1、3、9；4個數1、3、9、27，皆是3的次方。

四、發現這些整數的規律性，進而推導出公式

由上列的推算我們發現使用2個數1、3，經過數字間加減後，可得到1至4（1和3相加）的連續整數；使用3個數1、3、9，經過數字間加減後，可得到1至14（1、3、9相加）的連續整數；使用4個數1、3、9、27，經過數字間加減後，可得到1至40（1、3、9、27相加）的連續整數。我們仿照上述的推算方式，找出第五個數是81，使得這5個數1、3、9、27、81，經過數字間加減後，可得到1至121（1、3、9、27、81相加）的連續整數，如此推算下去第6、7、8、9……個數字也都能如法炮製找出來，我們整理列表如下，並發現其規律性。

第n個數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數字	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
規律性	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
最多個數	1	4	13	40	121	364	1093	3280	9841	29524
規律	$3^1 \div 2 - 0.5$	$3^2 \div 2 - 0.5$	$3^3 \div 2 - 0.5$	$3^4 \div 2 - 0.5$	$3^5 \div 2 - 0.5$	$3^6 \div 2 - 0.5$	$3^7 \div 2 - 0.5$	$3^8 \div 2 - 0.5$	$3^9 \div 2 - 0.5$	$3^{10} \div 2 - 0.5$

所以最後我們發現使用10個數1、3、9、27、81、243、729、2187、6561、19683，經過數字間加減後，可得到1至29524（上述10個數相加）的連續整數，這真是太神奇了，只要10個數字的加減變化，居然能得到1至29524，這29524個數字。

當然我們也從中找到了規律性，那就是這些數字都是3的次方的數字，其第 n 個數字的公式是 3^{n-1} ，例如第5個數為 $3^{5-1} = 3^4 = 81$ ；第6個數為 $3^{6-1} = 3^5 = 243$ ；第7個數為 $3^{7-1} = 3^6 = 729$ ；依此類推，也可得到第8個數、第9個數、第10個數、第11個數、第12個數等……。

除此之外，我們也得到1到第 n 個數這些連續整數和規律性，其公式為 $3^n \div 2 - 0.5$ ，例如，第1個到第4個數分別為1、3、9、27，其和為40，也就是說使用這4個數作加減運算，可得到1、2、3、4、5、……、39、40，共40個數的連續整數。再如，第1個到第10個數分別為1、3、9、27、81、243、729、2187、6561、19683，其和為29524，也就是說使用這10個數作加減運算，可得到1、2、3、4、5、……、29523、29524，共29524個數的連續整數。

伍、研究結果

- 一、使用10個數1、3、9、27、81、243、729、2187、6561、19683，經過數字間相互加減後，可得到1至29524（上述10個數相加）的連續整數。
- 二、我們從上述這些數字發現了規律性，那就是這些數字是3的次方的數字，其第 n 個數字的公式是 3^{n-1} 。
- 三、我們也推算從1到上述第 n 個數這些連續整數和規律性，其公式為 $3^n \div 2 - 0.5$ 。

參考文獻

數學奧林匹克——小學版四年級分冊。新竹：凡異出版社。

數學奧林匹克——小學版五年級分冊。新竹：凡異出版社。